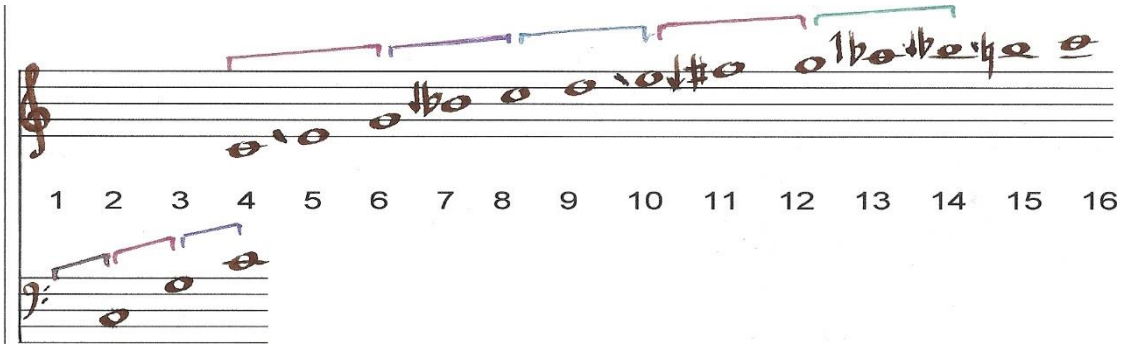
Die Intervalle der Naturtonreihe

Eine Naturtonreihe, eigentlich ein akustisch-physikalisches Phänomen, ist das tatsächliche, unveränderliche Grundelement der Musik - eine fortschreitende Zahlenreihe, die bei 1 beginnt und gegen Unendlich geht.



Jede Zahl dieser Reihe stellt den Faktor dar, mit welchem die Frequenz des Grundtons der Reihe (Tonzahl 1) multipliziert werden muss, um die Tonhöhenfrequenz des dieser Zahl entsprechenden Tons zu ermitteln.

Sowohl physikalisch als auch musikalisch zeigen sich die Naturtöne in den Natur-Flageoletts auf Streichinstrumenten, bei denen man die schwingende freie Saite an einem der Schwingungsknoten berührt und so die Oberschwingung fixiert. Ähnlich ist das Prinzip bei Blasinstrumenten, vor allem in den „multiphonen“ Klängen der Holzblasinstrumente, und auch beim Obertonsingen, beispielsweise im „Khoomei“ (auch: Chöömi) der tuwinischen Musik, dem Kehlgesang, wie ihn die Tuwa in Sibirien und auch die Mongolen so großartig beherrschen. Das Obertonsingen ist inzwischen weltweit bekannt, und seine Technik kann leicht erlernt werden: Zum kehlig (z.B. auf „ö“) gesungenen, beibehaltenen Grundton klingen die Obertöne der Reihe nach als Pfeiftöne – und durch die Veränderung der Mundöffnung (wie bei der Vokalbildung) lassen sich diese Töne einzeln steuern – sie sind immer exakt, auch dann, wenn man den Grundton verändert – dann passen sich Obertöne dem neuen Grundton an. Man kann hier also gar nicht „falsch“ singen, denn es klingen die reinen Naturtöne von alleine. Solche Naturtonreihen bringen auch alle Blechblasinstrumente hervor, wenn sie ohne Ventile oder Züge gespielt werden. Natur-Blasinstrumente wie Alphorn, Jagdhorn, Waldhorn und Posthorn, und auch das australische Didgeridoo haben ohnehin keine Ventile angebracht, auf diese Weise bringen sie ausschließlich Obertöne (Naturtöne) hervor.

Intervalle werden aus zwei Tönen mit unterschiedlicher Tonhöhe gebildet. Weil die Tonhöhenfrequenzen in einer Naturtonreihe den Tonzahlen vollkommen entsprechen, genügt es, lediglich die Tonzahlen ins Verhältnis zueinander zu setzen, um die Intervallgröße als Proportion zu bestimmen. (z.B. Ton 11 zu Ton 8 = 11/8.) Dabei kann jede Zahl (aus $0 < R < \infty$) mit einer anderen Zahl aus dieser Menge eine Proportion, die einem musikalischen Intervall entspricht, bilden, und dieses Intervall muss sich keineswegs auf den Raum einer Oktave beschränken. (z.B. Ton 11 zu Ton 4 = 11/4) Zweckmäßig wird es dann aber sein, die größere Zahl zu halbieren, wenn es sich um eine gerade Zahl handelt, oder die kleinere Zahl zu verdoppeln, bis der Quotient aus beiden Zahlen zwischen 1 und 2 liegt, dem Tonraum einer Oktave.

Beispiel: Beim Intervall 243/5 liegen die Tonzahlen 5 Oktaven auseinander. Der Zähler lässt sich, weil es sich um eine ungerade Zahl (243) handelt, nicht halbieren. Also muss man den Nenner (5) so lange verdoppeln, bis er an den Zähler heranreicht, aber ihn nicht übersteigt: 5, 10, 20, 40, 80, 160. Das Intervall liegt nun im Bereich einer

Oktave: 1 < 243/160 < 2 und stellt sich als eine leicht erhöhte Quinte heraus, denn wäre der Zähler nur um 3 kleiner, dann wäre das Intervall eine reine Quinte: 240/160 = 3/2.

Auf diese Weise lassen sich alle Intervalle, die möglich sind, im Raum einer Oktave zusammenfassen. Doch damit ist noch nichts über den Grundton ausgesagt.

Der Grundton

Grundton ist immer die 1, d.h., dem Grundton ist die Tonzahl 1 zugeordnet. Seine Frequenz vervielfacht sich ganzzahlig in seinen Obertönen (Natur- oder Partialtöne) entsprechend der Tonzahl. Dieser Grundton lässt sich natürlich auch oktavieren (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 usw.), um mit einem Ton in höheren Oktaven ein Intervall seines Oktavraums bilden zu können – doch handelt es sich hierbei um Oktaven des Grundtons: Der Grundton selbst bleibt immer die 1.

Dies ist der wesentliche Unterschied zur Tonleiter, wie wir sie kennen, zum Beispiel in der Folge von Intervallen:

	C	D	E	F	G	A	H	C
Intervall	CC	CD	CE	CF	CG	CA	CH	CC’
Intervallgröße	Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Septim	Oktav
Proportion	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

Der Naturtonreihe mit dem Grundton C gehören nur die Intervalle an, deren unterer Ton C ist, also der Grundton 1 mit seinen Oktaven 2, 4, 8. Diese C-Dur-Tonleiter enthält aber zwei Intervalle, deren Grundton (Tonzahl 1) nicht C ist, sondern F(!) - nämlich die Quarte 4/3 (F) und die Sexte 5/3 (A). In diesen Intervallen ist C die Quinte (3) und nicht der Grundton (oder dessen Oktaven 2, 4, 8 etc). Mit anderen Worten: Die Intervalle 4/3 und 5/3 gehören der Naturtonreihe auf F (3/3, 4/3, 5/3 und 6/3) an.

Die gebräuchliche Tonleiter von C-Dur enthalt also nicht nur Naturtöne der Tonika C, sondern auch die Naturtöne der Subdominante F und der Dominante G:

Naturintervalle auf C: 1/1, 3/2, 5/4, 9/8, 15/8, 2/1

Naturintervalle auf F: 3/3(= 1/1), 4/3, 5/3, 6/3(= 2/1)

Naturintervalle auf G: 9/8, 12/8(=3/2), 15/8.

Daraus folgt: Selbst in der C-Dur-Tonleiter ist das C nicht unbedingt der Grundton! Das kann man sehr leicht hören, wenn man bei den Intervallen der Quarte CF und der Sexte CA den unteren Ton C verdoppelt: Die Sexte klingt hohl, es fehlt ein Zwischenton – und die Quarte klingt vollkommen dissonant. Die Spannung, die diese beiden Intervalle in sich haben, lässt sich sofort lösen, wenn man an Stelle des verdoppelten C ein F spielt, und sei es noch so leise – denn dieses ist der wirkliche Grundton dieser Intervalle (und nicht das C).

Ein ähnlicher Effekt tritt mit den Intervallen des Grundtons G auf. Die Intervalle 9/8 (CD) und 15/8 (CH) liegen innerhalb der kritischen Bandbreite um C und werden deutlich entschärft, wenn man sie mit dem Grundton G oder einer seiner Oktaven ergänzt.

Man kann diese Darstellung der C-Dur-Tonleiter noch durch die *chromatischen* Töne ergänzen: Es (6/5), Ges (7/5 oder 45/32), As (8/5) und B (9/5). (Das „Des“ passt hier nicht hinein, es wäre die Unterquint zu As, analog F zu C.) Diese Töne gehören alle zur Naturtonreihe auf As, der Unterterz. Damit wäre die chromatische 12-Ton-Skala mit ungleichen (!)

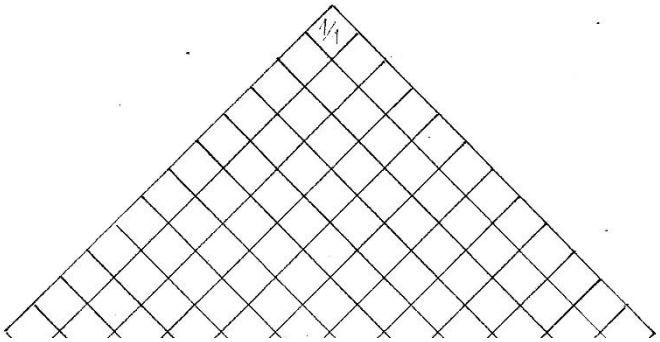
Halbtonstufen komplettiert. Die 12-Ton-Musik geht dagegen von gleichen (temperierten = angepassten) Halbtonstufen aus.

An diesem Punkt wollen wir die reinen Intervalle in der Musik verlassen und uns nur mehr ihren Proportionszahlen zuwenden, die im Lambdoma in einer überwältigend einfachen Form komplett dargestellt sind.

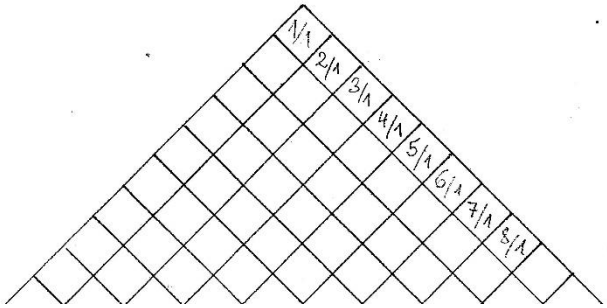
Das Lambdoma

Am einfachsten ist das Lambdoma, eine systematische Anordnung aller Bruch- oder Verhältniszahlen (Proportionen), zu verstehen, wenn man es selbst entwickelt. Es ist einfacher als das leichteste Sudoku-Rätsel.

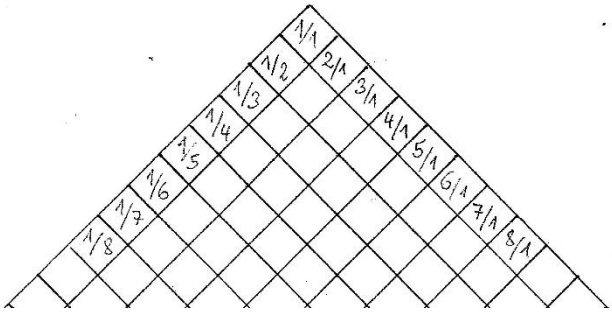
Wir beginnen mit der Zahl 1, dargestellt als Proportion 1/1. Diese steht an der Spitze des Lambdoma. Dazu nimmt man am besten ein kariertes Blatt und dreht es um 45 Grad, sodass das erste Kästchen links oben den Platz an der Spitze einnimmt. Dort steht nun die Proportion 1/1.



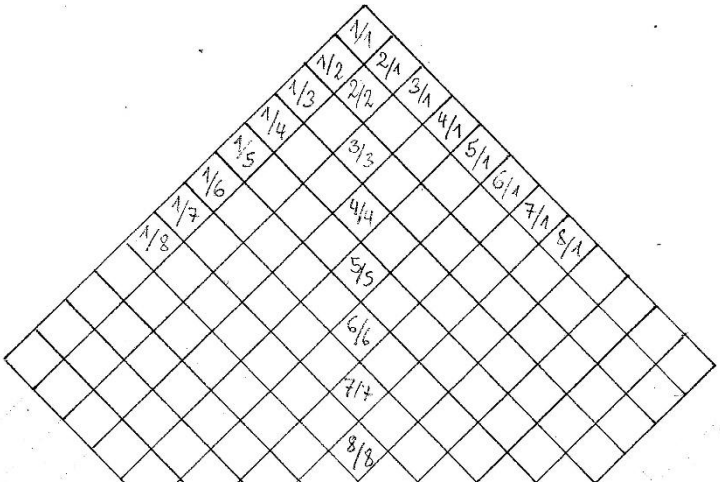
Die 1, Proportion 1/1, ist der Ausgangs- und Scheitelpunkt des Lambdomas. Rechts von ihr abwärts werden nun die Zahlen fortschreitend angeordnet: 2/1, 3/1, 4/1, … 8/1 usw. Theoretisch kann die Zahlenreihe bis ins Unendliche fortgesetzt werden.



Auf der Gegenseite, von 1/1 beginnend nach links unten, werden die Kehrwerte eingezeichnet, also 1/2, 1/3, 1/4, … 1/8 usw. In der Waagrechten stehen sie einander gegenüber. Auch diese Reihe kann ins Unendliche fortgesetzt werden; ihr Wert geht dabei gegen Null.

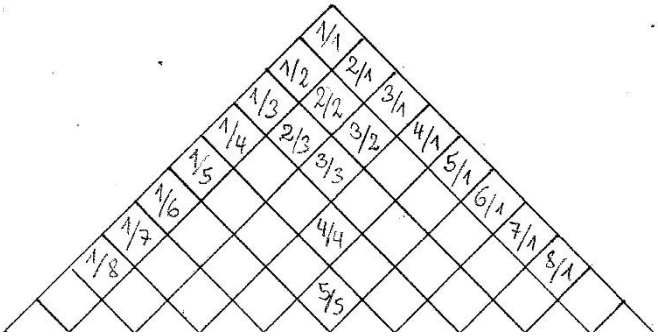


Beide Reihen, Wert und Kehrwert, bilden nun zwei von 1/1 ausgehende und auseinander driftende Schenkel eines imaginären Dreiecks, die an den griechischen Großbuchstaben Lambda erinnern. Nun kommt eine neue Linie hinzu, die das System in zwei Hälften teilt: nämlich die Reihe aller Zahlen, deren Wert 1 ergibt, nämlich 2/2, 3/3, 4/4, … 8/8 usw. Diese Linie geht von 1/1 senkrecht nach unten.



Man nennt diese Linie auch Zeugertonlinie, ein musikalischer Ausdruck, weil sie in jeder Waagrechten die Proportion des Grundtons = 1/1 wiedergibt. Mathematisch hat sie ganz einfach immer nur den Wert 1.

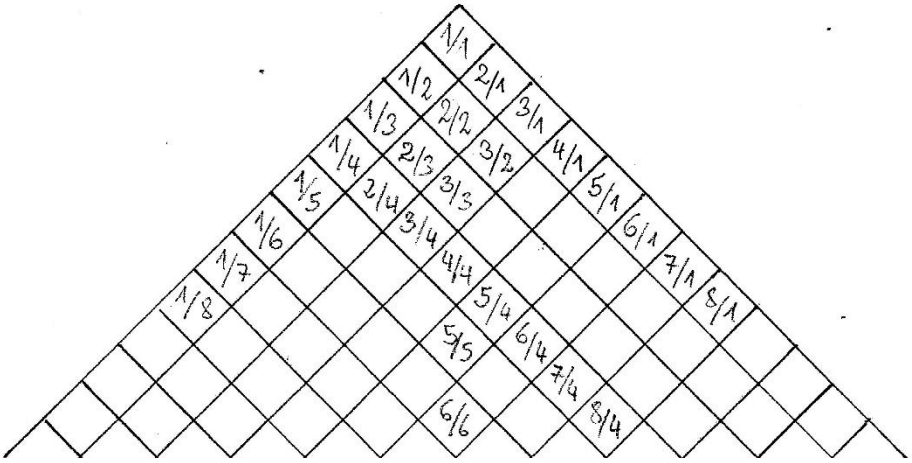
Die ersten 4 Kästchen sind bereits ausgefüllt. Nun geht es an die nächste Reihe, hier klafft eine Lücke zwischen 1/3 und 3/3 auf der linken und 3/3 und 3/1 auf der rechten Seite. Wenn wir uns die Zahlen darüber ansehen: 1/2 und 2/2, 2/2 und 2/1, können wir analog links 2/3 und rechts den Kehrwert 3/2 einsetzen.



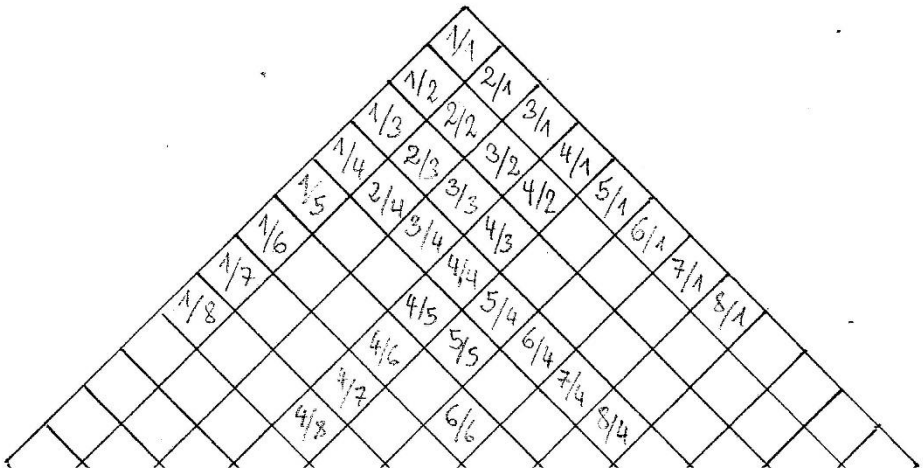
Nun beginnt dies eine Form anzunehmen: von links oben nach rechts unten heißt die Reihe der Proportionen 1/3, 2/3, 3/3. Der Nenner bleibt gleich, im Zähler steigt die Zahlenreihe an. -

- Umgekehrt ist es von oben rechts nach links unten. Dort ist die Folge 3/1, 3/2, 3/3. Hier bleibt der Zähler gleich, und im Nenner steigt die Zahlenreihe an.

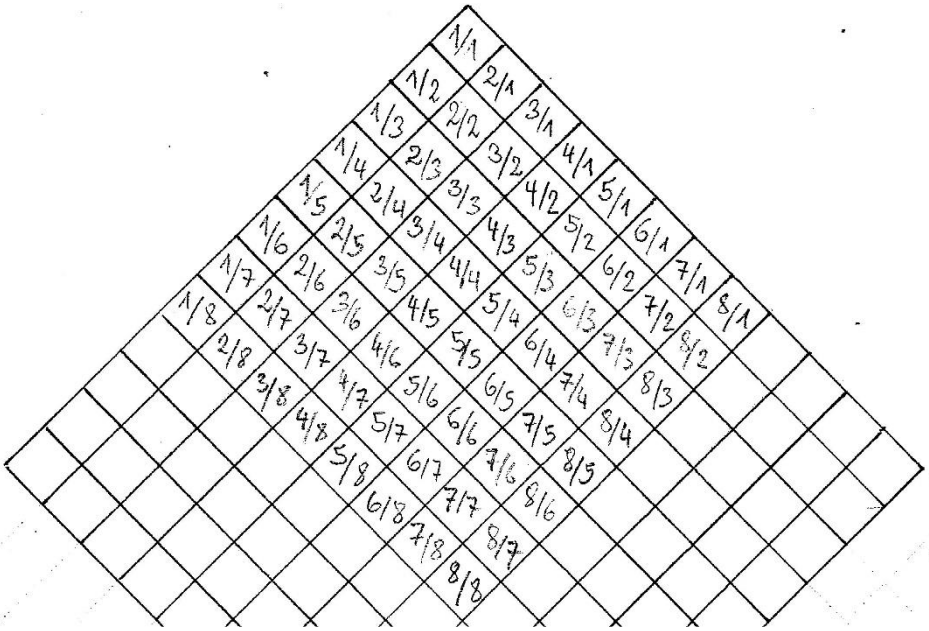
Das Prinzip lässt sich fortsetzen: Bei 1/4 beginnend tragen wir von 1/4 nach rechts unten ein: 2/4, 3/4, 4/4 – ja, wir können es noch weiter fortsetzen: 5/4, 6/4, 7/4, 8/4…

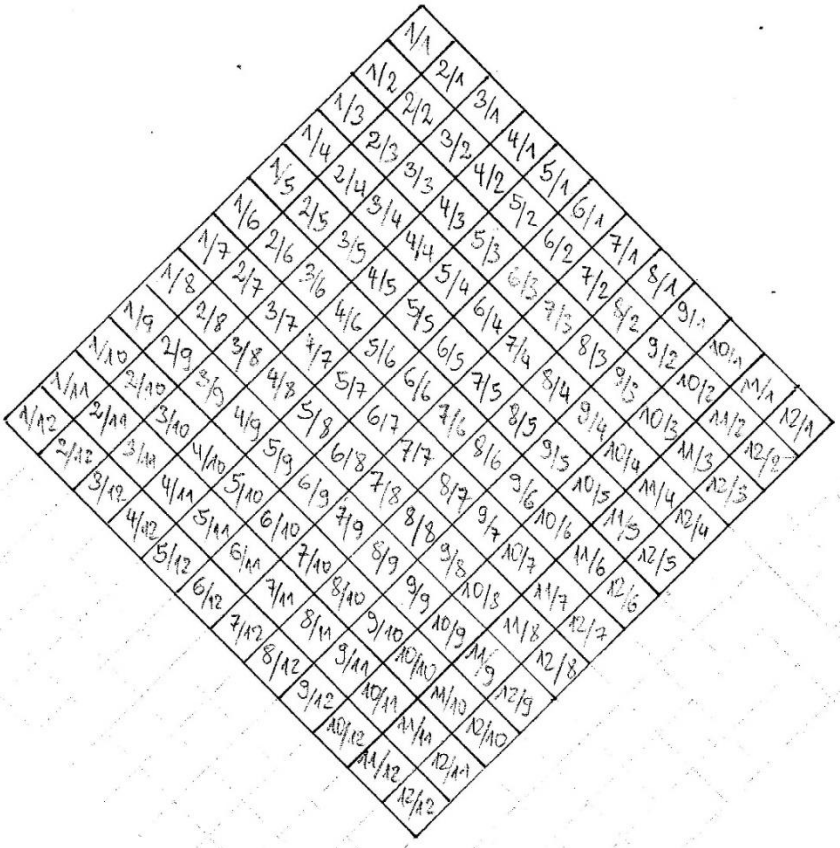


Und ebenso vom Kehrwert 4/1 aus, von rechts nach links unten: 4/2, 4/3, 4/4 (schon besetzt), 4/5, 4/6, 4/7, 4/8…

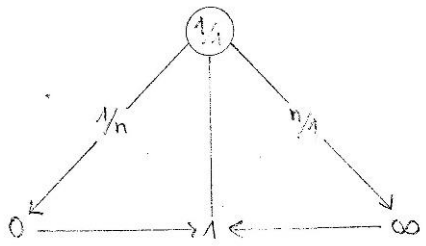


Jetzt ist das Prinzip völlig klar, und wir brauchen nur noch die anderen Kästchen entsprechend auszufüllen. Hierbei bemerkt man nebenbei, dass alle Kehrwerte an jeder Position einander exakt gegenüberstehen.





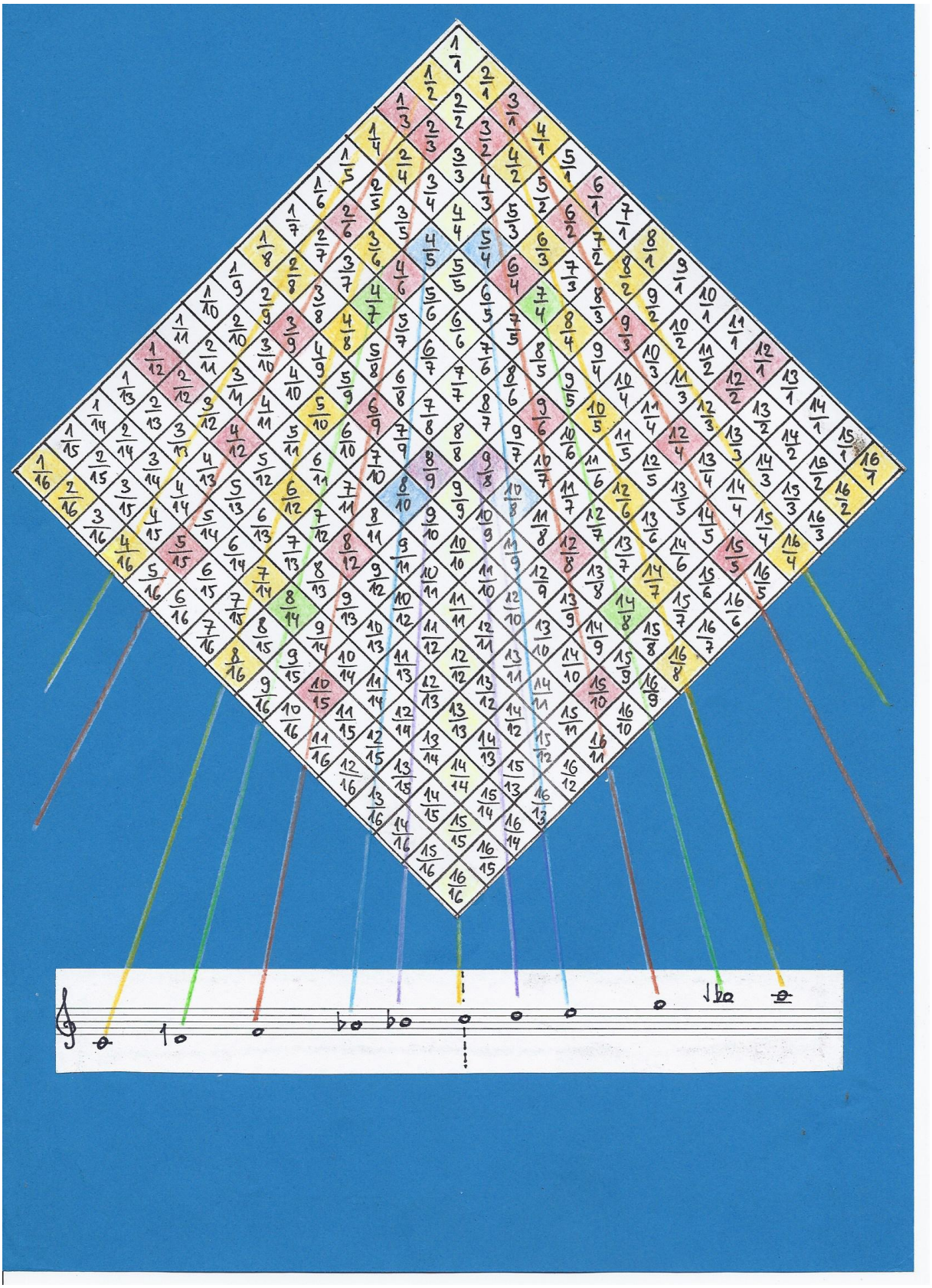
So lässt sich das System ins Unendliche fortsetzen. Links von der Zeugertonlinie wandern die Werte der Proportionen gegen Null, umso extremer, je weiter links sie sich befinden, und entsprechend nach rechts gegen Unendlich. Und zur Mitte hin wandern beide Seiten auf den Wert 1 zu, den sie dann in den Proportionen der Zeugerlinie (…5/5, 6/6, 7/7 …) auch erreichen. Zusammengefasst hat das Lambdoma das folgende Aussehen:



Das ist ganz einfach, enthält aber alle denkbaren Bruchzahlen aus ganzen Zahlen, bzw. alle denkbaren Proportionen ganzer Zahlen. Und weil die ganzen Zahlen den Tonzahlen der Naturtonreihe entsprechen, enthält das Lambdoma damit auch die Proportionen aller denkbaren musikalischen Intervalle. (Auf die Untertöne – links von der Zeugertonlinie - kommen wir im Kapitel „Untertonreihen“ noch zu sprechen.)

Gleichtonlinien

Fast alle Intervalle findet man im Lambdoma gleich häufiger. So geben die Proportionen 2/1, 4/2, 6/3, 8/4 usw. immer das Oktav-Intervall 2/1, die Proportionen 3/2, 6/4, 9/6, 12/8, 15/10 usw. immer das Quint-Intervall 3/2, und dies ist bei den anderen Intervallen ebenso. Verbindet man im Lambdoma alle Proportionen, die den gleichen Wert ergeben, miteinander, so ergeben sich gerade Linien, die nicht nur die Töne der Ober-und Untertonreihen abbilden, sondern nach oben hin sich in einem einzigen Punkt schneiden, einem Punkt, der genau über dem Ausgangspunkt 1/1 steht und logischerweise mit 0/0 bezeichnet werden müsste. Das ist der „Point Zero“, der nicht beschrieben werden kann und wohl eines der unlösbaren Geheimnisse der Mathematik und der Musik bleiben wird.



Die Gleichtonlinien bilden die Untertonreihe (links von der Mitte) und die Obertonreihe (rechts von der Mitte) ab. Hier ist nur die jeweils erste Oktave dargestellt, die Skalen setzen sich nach links und rechts fort.

Damit ist aus einem Zahlensystem wieder ein musikalisches System geworden. Und das Lambdoma gibt überdies die Entwicklung der Musik in der Geschichte wieder! – Betrachten wir nur den oberen Teil des Lambdomas:

1/1

1/2 2/1

1/3 2/2 3/1

1/4 2/3 3/2 4/1

2/4 3/3 4/2

3/4 4/3

4/4

Dies ist das Pythagoräische System. Rechts von der Zeugerlinie (1/1-2/2-3/3-4/4) finden wir von oben nach unten die Intervalle, aus denen es sich zusammensetzt: 2/1, 3/2, 4/3, die Intervalle Oktav, Quinte und Quarte. Dann folgen die Oberquinte 3/1, die Oktave 4/2 (=2/1) und die Doppeloktave 4/1. Mit dem Grundton („Zeugerton“) 1/1, 2/2, 3/3 und 4/4 bilden sie die pythagoräische Tetraktys.

4/1 1/1

3/1 4/2 2/2 2/1

→ 2/1 3/2 4/3 → 3/3 3/2 3/1

1/1 2/2 3/3 4/4 4/4 4/3 4/2 4/1

Aus Oktave, Quinte und Quarte haben die Pythagoräer alle 7 Tonstufen ihrer Skala gebildet, das sich wie die heutige Tonleiter aus 5 Ganzton- und 2 Halbtonstufen zusammensetzt. Der Ganzton wird aus dem Unterschied von Quinte und Quarte gebildet:

3/2 : 4/3 = 3/2 x 3/4 = 9/8.

Prim: 1/1

Sekund: Ganzton 9/8

Terz: 2 Ganztöne 9/8 x 9/8 = 81/64

Quart: 4/3

Quint: 3/2

Sext: Quinte + Ganzton 3/2 x 9/8 = 27/16

Septim: Quinte + 2 Ganztöne 3/2 x 9/8 x 9/8 = 243/128.

Oktav: 2/1

Der Halbton ist der Unterschied von Oktave und großer Septim: 2/1 : 243/128 = 256/243. Er lässt sich ebenso aus dem Unterschied zwischen Quart und Terz berechnen: 4/3 : 81/64 = 4/3 x 81/64 = 256/243. Mit diesem „pythagoräischen Halbton“ lassen sich die chromatischen Intervalle bestimmen:

Kl. Sekund: Halbton 256/243

Kl. Terz: Sekund + Halbton 9/8 x 256/243 = 32/27

Tritonus: Quart + Halbton 4/3 x 256/243 = 1024/729

Kl. Sext: Quint + Halbton 3/2 x 256/243 = 128/81

Kl. Septim: Sext + Halbton 27/16 x 256/243 = 16/9, oder: 2 Quarten: 4/3 x 4/3 = 16/9.

NB.: Man kann diese Intervalle auch als „Komplementär-Intervalle“ betrachten, jene Intervalle, die die Hauptintervalle zur Oktave 2/1 ergänzen.

Sekund + kl. Septim,	Terz + kl. Sext,	Sext + kl. Terz,	Septim + kl. Sekund.
9/8 x 16/9 = 2/1	81/64 x 128/81 = 2/1	27/16 x 32/27= 2/1	243/128 x 256/243 = 2/1

Dem mathematisch geschulten Auge fällt sofort auf, dass es sich hier um Kehrwerte handelt, die lediglich mit 2 multipliziert werden müssen, damit man die Oktave erhält. Das gilt selbst für den Tritonus 1024/729 mit seinem Komplementärintervall 729/512. Diese Zahlen zeigen aber auch, dass selbst dieser Tritonus nicht in der Mitte des Systems stehen kann, denn beide Proportionen, mit sich selbst multipliziert, können nicht 2/1 ergeben. Dies gilt nur für √2.

Wie bei den meisten musikalischen Systemen – mit Ausnahme des gleichstufig-temperierten Systems – spielt es eine Rolle, ob ein Ton durch einen Halbton erhöht oder vermindert wird. Von der großen Sekund abgeleitet hat die kl. Sekund im pythagoräischen System das Intervall 2187/2048, die kleine Terz von der großen Terz abgeleitet sogar eine Intervallproportion von 19683/16384. Das pythagoräische System stößt hier an seine Grenzen – und erst recht an die Grenzen der musikalischen Umsetzung: einfacher und praktizierbar geht’s mit dem natürlichen Intervall 6/5 für die kleine Terz.

Das pythagoräische Tonsystem hatte in Europa fast zwei Jahrtausende Bestand. Erst ab dem 15.Jahrhundert konnte die reine Terz 5/4, die auf den britischen Inseln und in der arabischen Musik schon länger in Gebrauch war, am europäischen Festland Fuß fassen und wegen ihrer harmonischen Einfügung in die Quintenwelt des Organums und des klassisch-strengen Palästrina-Stils zum Eckpfeiler der europäischen Mehrstimmigkeit werden. Im Lambdoma wird dies schon in der nächstfolgenden Zeile mit der Zahl 5 ersichtlich:

1/1

1/2 2/1

1/3 2/2 3/1

1/4 2/3 3/2 4/1

1/5 2/4 3/3 4/2 5/1

2/5 3/4 4/3 5/2

3/5 4/4 5/3

4/5 5/4

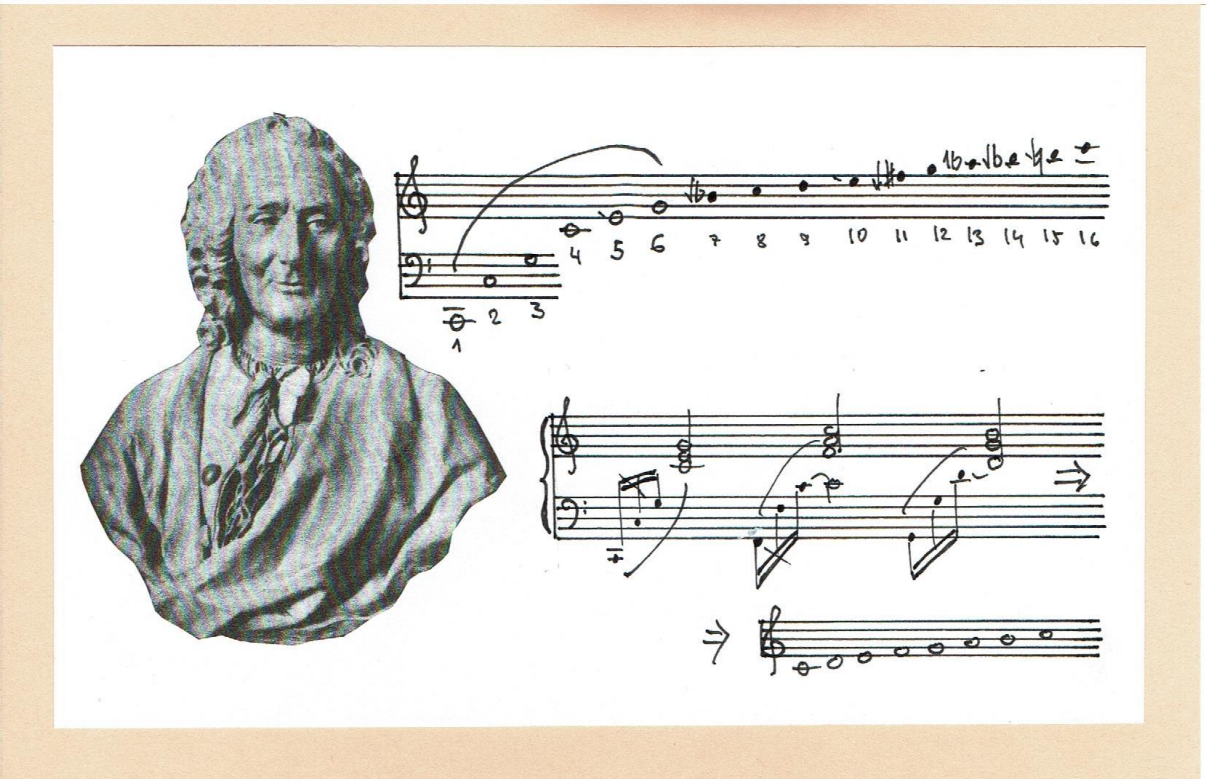
5/5

Das ist das Tonsystem, auf welchem die Musik noch heute basiert. Mit den 5-er Intervallen ist das System vollständig, es lassen sich alle 12 gängigen Intervalle darstellen:

Prim	kl.Sek.	gr.Sek.	kl.Terz,	gr.Terz,	Quart,	Tritonus,	Quint,	kl.Sext,	gr.Sext,	kl.Sept.,	gr.Sept
1/1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	3/2	8/5	5/3	16/9	15/8

NB.: Die Zahl 5 ermöglicht auch den „kleinen“ Ganzton 10/9 – diesem würde dann die kleine Septim 9/5 als Komplementär-Intervall entsprechen. Der Unterschied zwischen großem und kleinen Ganzton, bzw. größerer und „kleinerer“ kleiner Septim beträgt 81/80 = 21,5 C (syntonisches Komma).

Für Jean-Philippe Rameau, in seinem 1722 erschienenen „Traité de l'Harmonie reduite à ses Principes Naturels“ war damit klar, dass die ersten 6 Töne (der Sechste als Verdoppelung des Dritten) der Naturtonreihe der Grundstock unserer Harmonielehre sind. Mit den 6 ersten Tönen der Naturtonreihe auf Tonika, Dominante und Subdominante sind die Tonleiter selbst und das ganze Tonsystem vervollständigt.



Führende Musikwissenschaftler des 20.Jahrhunderts konnten sich dieser einfachen Schlussfolgerung nicht anschließen, denn damit wäre Musik nicht Produkt des menschlichen Geistes allein, der die Vorgaben durch die Natur bestenfalls benutze, über sie jedenfalls erhaben sei.

Die einfachen und Prinzipien der Saitenteilung und des Lambdomas, vorgegeben von der Natur und entschlüsselt von Physik und Mathematik, sprechen eine andere Sprache - ohne dabei die menschliche Leistung zu schmälern. Eine gewisse Bescheidenheit anzunehmen aber käme heute besonders jenen zugute, die noch immer die Erhabenheit des menschlichen Geistes preisen und dem Missbrauch der Natur weiter das Wort reden.

Untertonreihen

Ebenfalls umstritten ist die Existenz von Untertönen, selbst in der Welt der Physik. Es soll jedoch gelungen sein, im Klang eines hohen Fagott-Tons die ersten drei Untertöne nachzuweisen, was insofern überraschend ist, dass mit dem zweiten Unterton (dem dritten, rechnet man den klingenden Ton als 1.Ton) die Unterquinte, also eine Quarte zu hören gewesen sein muss. Die anderen Töne sind ohnehin nur die Unter-Oktaven des angeblasenen Tons und fallen daher nicht besonders auf.

Auch wenn vorläufig einmal kein Untertonklang auf einem Instrument hörbar sein wird, so gibt es dennoch hörbare Untertonreihen, also die Abfolge von Untertönen, die somit nicht nur von theoretischer Natur sind: Spielt man auf einem Instrument eine permanent gleitend aufsteigende Folge von Tönen unter Beibehaltung des Anfangstones als Grundton, dann

wird tatsächlich eine aus tiefsten Tiefen aufsteigende Reihe der Untertöne wahrnehmbar – als Differenztöne der jeweiligen Intervalle.

NB.: Differenztöne 1.Ordnung errechnen sich aus der Differenz der Tonzahlen eines Intervalls. In der Intervallreihe 12/11, 11/10, 10/9, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 5/4, 4/3, 3/2 ist der Differenzton immer = 1, also der Grundton. In dieser Intervallfolge bilden diese Grundtöne eine aufsteigende Untertonreihe.

In jüngster Zeit hat die neuronale Gehirnforschung die Existenz von Untertonreihen bestätigt. Unser Hören beruht nämlich auf einem Vergleich von Zeiteinheiten, die sich aus den Frequenzen ergeben – nämlich aus deren Dauer einer einzigen Schwingung („Schwingungsperiode“). Je kleiner die Schwingungsdauer T ist, desto größer ist die Frequenz:

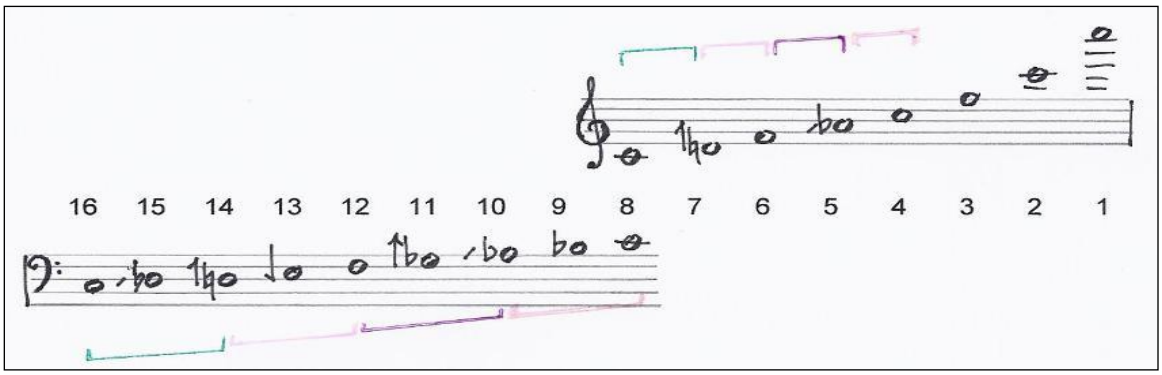
$$f = 1/T$$

Die kleinste Schwingungsdauer (Periode), mit der nicht nur das menschliche Gehirn, sondern auch das Gehirn von Säugetieren und Vögeln arbeitet, beträgt exakt 0,4 Millisekunden, was einer Ton-Frequenz von 2.500 Hz entspricht (das höchste Es am Klavier). Das Gehirn vergleicht nun die Periodendauern der eingehenden Frequenzen miteinander, und dabei benutzt es die Vielfachen der Periode mit 0,4 Millisekunden. Dieser sogenannte „Periodizitätsvergleich“ wird auf diese Weise zu einem reinen Vergleich ganzer Zahlen, wie wir sie von der Saitenteilung her kennen - zu einer Intervall-Proportion.

Wenn wir die Schwingungsperiode T = 0,4 Millisekunden vervielfachen, nehmen die entsprechenden Frequenzen umgekehrt proportional dazu ab

1 x 0,4 msek.	-	2.500 Hz,	(1)	Grundton
2 x 0,4 msek.	-	1.250 Hz,	(1/2)	1. Unteroktave
3 x 0,4 msek.	-	833,3 Hz,	(1/3)	Unterquint (= Quarte)
4 x 0,4 msek.	-	625 Hz,	(1/4)	2. Unteroktave
5 x 0,4 msek.	-	500 Hz,	(1/5)	Unterterz (= kl. Sexte)
6 x 0,4 msek.	-	416,7 Hz,	(1/6)	2. Unterquint (= Quarte, Unter-Okt.)
7 x 0,4 msek.	-	357,1 Hz	(1/7)	Unter-Naturseptim (= sept. Sekund)
8 x 0,4 msek.	-	312,5 Hz	(1/8)	3. Unteroktave
usw.				

und führen zu einer Tonskala, die exakt spiegelsymmetrisch zur Obertonreihe (Naturtonreihe) ist – also mit dem Grundton oben: Das ist die Untertonreihe.



Die hier abgebildete Untertonreihe hat den Grundton C (1) an der Spitze und enthält mit den Tönen 4,5,6, bzw. 8,10,12 die Moll-Dreiklänge auf F (f-moll). Transponiert man diese Skala auf die Frequenz 2500 Hz, (Schwingungsperiodendauer: 0,4 Millisekunden), dann wäre der Grundton das hohe Es, und die Dreiklänge wären in der Tonart as-moll. Tatsächlich sind die meisten Flöten, die man in Ausgrabungen gefunden hat – beginnend mit der Schwanenknochenflöte aus dem Geißenklösterle in der schwäbischen Alb (30.000 v.Chr.), den Flöten im antiken Griechenland und von den Azteken bis hin zur Inselgruppe der Salomonen in der Südsee alle in as-moll gestimmt (nach dem heutigen Kammerton A = 440Hz – zu Mozarts Zeiten wären sie noch in a-moll gestimmt gewesen). Diese überraschende Übereinstimmung war jahrzehntelang ein Rätsel für die Musikwissenschaft gewesen – und wird es wohl noch eine Zeitlang bleiben, bis die Ergebnisse der neuronalen Gehirnforschung*), so ist zu hoffen, auch bei ihr Anerkennung finden werden.

*) Bernhard Langner, Darmstadt, 2007, „The Neural Code of Pitch and Harmony", Cambridge, 2015.

Die Intervalle der Untertonreihe

Die Untertonreihe besteht also aus den Proportionen 1/1, 1/2, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10 und so fort, weit über 1/16 (s. obige Darstellung) hinaus. Der Wert der Proportion wird dabei immer kleiner und geht, je höher die Zahlen im Nenner werden, gegen Null, ohne diesen Punkt jemals zu erreichen. Die Frequenzen dieser Töne werden entsprechend niedriger und gehen gleichfalls gegen Null. Sie lassen sich auf die gleiche Weise wie die Obertöne berechnen, nur multipliziert man für die Untertöne die Frequenz des Grundtons mit den reziproken Tonzahlen. Weil aber ab einem Frequenzbereich von 16 bis 20 Hz die Töne für unser Ohr nicht mehr wahrnehmbar werden (hier beginnt der Infraschallbereich), sind für die musikalische Praxis Untertöne unter 1/16 bis 1/24 der Grundfrequenz kaum mehr anwendbar, zumal der Klangaufbau im Gehör von unten nach oben erfolgt, analog zu den Obertönen.

Die Intervalle der Untertonreihe sind dieselben wie in der Obertonreihe: Die Unterterz beispielsweise, also das Verhältnis 1/4 : 1/5 = 5/4 hat die gleiche Intervallgröße wie die Oberterz 5/4. Und so ist es bei allen anderen Intervallen der Untertonreihe – es kommen keine neuen Intervallgrößen hinzu. Der einzige Unterschied: In der Untertonreihe liest man die Intervalle in der Gegenrichtung: die Unterterz, um bei dem Beispiel zu bleiben, hat die Proportion 4/5 = 0,8 - dieser Wert passt nicht in die Oktave der Obertöne mit den Werten 1 bis 2. Man kann das Intervall 4/5 eine Oktave höher versetzen: 4/5 x 2/1 = 8/5. Dieses Intervall passt, es ist die kleine Sexte. Und auf diese trifft man, wenn man vom Oktavton eine große Terz abwärts schreitet (2/1 : 5/4 = 8/5). Die kleine Sext ist deshalb die „Unterterz".

NB.: Dass Obertonreihe und Untertonreihe spiegelbildlich exakt die gleichen Intervalle liefern, hat zur Folge, dass sich die Dreiklänge bei der Übertragung in das jeweilig andere System umkehren. Der Dur-Dreiklang, gelesen 4 – 5 – 6, mit der großen Terz 5/4 unten und der kleinen Terz oben, dreht sich in der Untertonreihe um: Gelesen 6 – 5 – 4, liegt dort die kleine Terz 6/5 unten, und oben darüber steht die große Terz 5/4. Das ist der Molldreiklang, wie er definiert wird. Allgemein ausgedrückt würde dies bedeuten: Die Untertonreihe enthält die Moll-Klänge, die Obertonreihe die Dur-Klänge. Und diese Klänge bestehen nicht ausschließlich aus dem geläufigen Dreiklang 4-5-6, bzw. 6-5-4, sondern auch aus allen anderen möglichen Intervallkombinationen. – Aber das ist noch „Zukunftsmusik". -

Auf die vorhin beschriebene Weise kann man nun alle Intervalle, die im Lambdoma auf der linken Seite stehen und Unterton-Intervalle darstellen, mittels Oktavierung auf die rechte Seite hinüberbringen, wo sie ohnehin schon vorhanden sind. Aus 2/3 wird beispielsweise durch Oktavierung 4/3, eine doppelte Oktavierung von 1/3 ergibt ebenfalls die Quarte 4/3.

Eine dreifache Oktavierung macht aus einem nicht vorstellbaren Intervall 2/9 eine kleine Septime 16/9 (2/9 x 2/1 x 2/1 x 2/1 = 16/9).

Angewendet auf die Untertonreihe:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	1/13	1/14	1/15	1/16
okt.:	2/2	4/3	4/4	8/5	8/6	8/7	8/8	16/9	16/10	16/11	16/12	16/13	16/14	16/15	32/16
=	1/1	4/3	1/1	8/5	4/3	8/7	1/1	16/9	8/5	16/11	4/3	16/13	8/7	16/15	2/1

1.“Unteroktave: 1/1 – 2/1.

Die 2.“Unteroktave“ wird durch die Quarte 4/3 geteilt: 1/1 – 4/3 – 2/1.

die 3. Unteroktave durch Unterterz, Quarte und Unterseptim: 1/1 – 8/5 – 4/3 – 8/7 – 2/1,

die 4. Unteroktave hat bereits 8 Töne: 1/1 - 16/9 - 8/5 - 16/11 - 4/3 - 16/13 – 8/7 – 16/15 –2/1,

die Oktave jeweils nicht mitgezählt. Die darauffolgende Unteroktave enthielte bereits 16 Töne mit 8 neu hinzugekommenen Intervallen (32/17, 32/19, 32/21 etc.) analog zu den Oktaven der Oberton-Naturtonreihe. Wie bei dieser verdoppelt sich die Zahl der in Oktave enthaltenen Töne der Untertonreihe von Oktave zu Oktave. Ihre Abstände würden dabei so klein, dass sie nicht mehr wahrgenommen werden können und spielen deshalb in der musikalischen Praxis kaum eine Rolle mehr.

Lambdoma, Saitenteilung und Intervalle

Das Lambdoma ist, wie wir gesehen haben, nicht nur eine geniale systematische Aufstellung aller Zahlenproportionen, sondern enthält auch die gesamten Grundlagen der Musik aller Kulturen. Diese phantastisch anmutende Verbindung von mathematischer Logik und Musik sei hier abschließend noch einmal zusammengefasst:

1. Der „Zeugerton“, Intervallgröße 1/1 gilt für jede Frequenz, die damit die Funktion des Grundtons einnimmt.

2. Die „Zeugertonlinie“ trennt das System in Untertöne, deren Intervallproportionen kleiner 1 und größer als Null sind, auf der linken Seite – und in Obertöne auf der rechten Seite, deren Intervallproportionen größer als 1 sind und gegen Unendlich gehen.

3. Die „Gleichtonlinien“ verbinden Intervalle gleicher Größe und bilden sie auf der Basis des Lambdoma-Systems ab - links vom Zeugerton als absteigende Untertonreihe, rechts davon als aufsteigende Obertonreihe. Beide Reihen sind einander spiegel-bildlich und unbegrenzt.

4. Bedingt durch die Spiegelsymmetrie sind die Intervallgrößen auf beiden Seiten des Lambdomas gleich. Auf der rechten Seite entstehen aus den Oberton-Intervallen Dur-Mehrklänge, auf der linken Seite aus den Untertönen Moll- Mehrklänge.

5. Den Proportionen von Tönen stehen die Proportionen ihrer Komplementärtöne in der Waagrechten spiegelbildlich von der Achse der Zeugertonlinie exakt gegenüber

6. Jeder Punkt auf der Zeugertonlinie ist Ausgangspunkt sowohl einer Obertonreihe (nach rechts unten) als auch einer Untertonreihe (nach links unten).

7. Auf den Grundton 1/1 bezogen, geben die Punkte $2^n/2^n$ (1/1, 2/2, 4/4, 8/8 etc.) auf der Zeugertonlinie den Ausgangspunkt der Reihe seiner Obertöne nach rechts unten und den Ausgangspunkt der Reihe seiner Untertöne nach links unten in der (n = 0,1,2,3…) entsprechenden Oktave an.

8. Die Proportionen auf der linken Seite stellen die Verhältnisse der Saitenteilung dar. - Auf der rechten Seite, spiegelbildlich dazu, stehen die Schwingungsverhältnisse der entsprechenden musikalischen Intervalle. Umgekehrt lässt sich die Saitenteilung aus der musikalischen Proportion ablesen.

9. Die Spitze des Lambdomas (Proportionen mit den Zahlen 1 – 4) stellt das Tonsystem der Pythagoräer dar. Aus diesen Proportionen allein wurden alle Töne dieses Systems dargestellt.

10. Die Spitze des Lambdomas mit den Proportionen der Zahlen 1 – 6 stellt das abendländische Tonsystem mit all seinen Intervallen, die sich daraus ergeben, in reiner Stimmung dar.

11. Mit den Zahlenproportionen der erweiterten Spitze von 1 – 12 (der amerikanische Komponist Harry Partch – „The Genesis of A Music“ - verwendete den Teilausschnitt von 6 – 12) lassen sich nahezu alle Tonsysteme der Welt darstellen.

12. Alle „Gleichtonlinien“ schneiden sich in einem Punkt oberhalb des Scheitelpunkts des Lambdomas, der der Proportion 0/0 entsprechen müsste. Dieser Punkt wäre der Ausgangspunkt aller musikalischen Töne und ihrer Intervalle.

Es sollte nun konsequenterweise der Entwicklung einer neuen Musik, die weitere Proportionen des Lambdomas mit einbezieht, nichts im Wege stehen. Eine Begrenzung bestünde allenfalls im Hörvermögen des Menschen, dessen Entwicklungsfähigkeit allerdings bislang sehr unterschätzt worden ist. Arnold Schönberg, dem dies auch durch eigene Erfahrung bekannt war, stellte bereits im Vorwort seiner Harmonielehre seine Forderung an die Zukunft auf: „Das Ohr wird sich mit diesen Tönen befassen müssen, weil es will!“