SAITENTEILUNG UND INTERVALLE III

Experimente zur Saitenteilung

Unendlich viele Intervalle aus Saitenteilungen

Theoretisch kann eine Saite in unendlich viele gleiche Abschnitte geteilt werden, die ihrerseits sowohl ein Zahlenverhältnis zur ganzen, ungeteilten Saite, als auch zueinander in ihren Teilabschnitten haben. In der Praxis ist dies nicht in jedem Fall möglich, denn je näher der Teilungspunkt zum Saitenrand hin liegt, desto ungenauer werden die entsprechenden klingenden Töne, sowohl die hohen als tiefen Töne – das machen die Spannungs-unterschiede, die rechts und links vom Teilungssteg entstehen. Zur Saitenmitte hin kommt man zu den besten Ergebnissen.

Wir beginnen mit der Teilung genau in der Mitte, sodass links und rechts die Saitenlänge gleich ist, der Ton also auch derselbe ist – nämlich die Oktave der ungeteilten Saite. Wenn man den Teilungssteg Stück um Stück in eine der Richtungen zum Saitenende hin verschiebt, dann werden beim Anzupfen der beiden Saitenteile die unterschiedlichsten Intervalle hörbar. Manche klingen sehr gut -wir würden sie als konsonant bezeichnen, und andere weniger gut bis hässlich - diese empfinden wir dann als „dissonant“.

Ich möchte dies an zwei Monochorden demonstrieren. Das eine Monochord hat eine Saitenlänge von 100cm, das andere eine Saitenlänge von 120 cm. Wir beginnen in der Mitte also bei 50cm, bzw. 60cm, und bewegen den Steg von der Mitte in 1cm-Schritten zum Rande hin.

	100cm			120cm	
1.Saitenteil	Intervall	2.Saitenteil	1.Saitenteil	Intervall	2.Saitenteil
50	**1/1**	50	60	**1/1**	60
51	51/49	49	61	61/59	59
52	13/12	48	62	31/29	58
53	53/47	47	63	21/19	57
54	27/23	46	64	**8/7**	56
55	**11/9**	45	65	**13/11**	55
56	**14/11**	44	66	**11/9**	54
57	57/43	43	67	67/53	53
58	29/21	42	68	17/13	52
59	59/41	41	69	23/17	51
60	**3/2**	40	70	**7/5**	50
61	61/39	39	71	71/49	49
62	31/19	38	72	**3/2**	48
63	63/37	37	73	73/47	47
64	**16/9**	36	74	37/23	46

65	**13/7**	35	75	**5/3**	45

Allein diese beiden Beispiele zeigen, wieviel Möglichkeiten es zur Bildung harmonischer Intervalle gibt – alle Proportionen bestehen aus relativ kleinen ganzen Zahlen. Unser Gehör ist natürlich nicht in der Lage, alle diese Intervalle zu identifizieren, es neigt dazu, sie Proportionen aus kleineren Zahlen zuzuordnen, also „zurechtzuhören". Und das ist eine Tatsache, die sich nicht nur aus der Erfahrung ergibt, sondern aus der Art, wie unser Gehirn Intervalle erkennt - aus dem Vergleich der Periodenlängen der Schwingungen, also einem zeitlichen Vergleich. Und dieser ist begrenzt.

Doch ist er nicht so begrenzt, dass wir Tonhöhen außerhalb des gewohnten Tonsystems nicht erkennen könnten! Denn außerhalb der Intervalle

9/8 große Sekund

6/5 kleine Terz

5/4 große Terz

4/3 Quart

3/2 Quint

8/5 kleine Sext

5/3 große Sext

9/5 kleine Septim (auch 16/9)

2/1 Oktav

gibt es noch viele, die in den Raum dieser Oktave passen, wie 7/4, 7/5, 7/6 oder 9/7, aber wegen der Ächtung der Zahl 7 als „unharmonisch" verworfen wurden. Ähnlich ist es mit der Zahl 11, die in der arabischen Musik in der Proportion 11/9 ein Haupt-Intervall hat (Sikah, = neutrale Terz), neben 12/11 (Dreivierteltton) und 11/6 (neutrale Septim), aber im europäischen System keinen Platz hat.

Anmerkung:

Allein im obigen Experiment mit den Monochorden tauchen Intervalle auf, deren Proportionen trotz höherer Zahlen angenehm für's Ohr klingen, wie die schon erwähnte neutrale „arabische" Terz 11/9. Daneben gibt es interessante Terzen wie die kleine Terz 13/11, die etwas eng klingt; noch enger, aber dafür sehr charakteristisch klingt die kleine septimale Terz 7/6, die mit der großen septimalen Terz 9/7 einen ebenso charakteristischen Dreiklang 6:7:9 bildet wie die „ekmelische" Kleinterz 13/11 mit der ekmelischen Großterz 14/11.

Während der septimale Dreiklang aus den Terzen 7/6 und 9/7 eine reine Quinte 9/6 = 3/2 bildet, geht die Rechnung mit dem „ekmelischen" Dreiklang aus den Terzen 13/11 und 14/11 nicht genau auf. Die aus ihnen errechnete Quinte 182/121 ist um 4,7 Cent zu hoch – dies ist aber ein Bereich, in dem unser Ohr diese Quinte von einer reinen Quinte nicht mehr unterscheiden kann, die Hörgrenze liegt bei 6 Cent.

Die höheren Zahlenproportionen, wie sie für die Intervalle der kleinen Sekund (= 16/15) und der großen Septim (= 15/8) in der oben aufgestellten Intervall-Tabelle noch fehlen, um die Töne zu den 12 Halbtöne vervollständigen, einschließlich einem Tritonus (= 45/32), sind für das Ohr sehr schlecht zu erfassen und werden in der Praxis auch ständig auf verschiedenste

Weise intoniert, je nachdem ob es sich um einen Leitton, der gewöhnlich höher gesungen wird, oder eine Wechselnote, die gewöhnlich tiefer gesungen wird, handelt.

Kritische Bandbreite

Dies bestätigt die Erfahrung einer sogenannten „kritischen Bandbreite", wonach Intervalle, die weniger als eine kleine Terz (= 6/5) vom Grundton entfernt sind, nur mit Beschränkungen gehört und interpretiert werden können – und dazu fallen eben die kleine Sekund und große Septim, sowie die große Sekund und die kleine Septim. Diese Intervalle können – und müssen sogar – unterschiedlich interpretiert werden, denn es gibt hier 2 Möglichkeiten, wie auch bei der kleinen Septim:

Große Sekund: 9/8 oder 10/9, kleine Septim: 9/5 oder 16/9.

Der Unterschied bei beiden Intervallen ist übrigens der Gleiche wie beim Vergleich der pythagoräischen Terz mit der natürlichen Terz: 81/80. ((9/8x9/8) : 5/4 = 81/80). Dieser kleine Unterschied fällt in der musikalischen Praxis, vor allem melodisch, nicht so sehr ins Gewicht.

Der Wert der „kritischen Bandbreite" mit der Grenze bei 6/5 (kleine Terz) hat sich übrigens in den letzten Jahren etwas geändert. Die Grenze wird heute besser mit dem Intervall 7/6 angegeben, das ist das Intervall aus Quint und Naturseptim. Damit ist die kritische Bandbreite um einen Viertelton kleiner geworden.

Ein interessantes Saitenteilungs-Experiment

In der vorangegangenen Untersuchung der Teilungsmöglichkeiten am Monochord haben wir den Teilungssteg in 1cm-Schritten weiterbewegt und sind dabei schon auf einige konsonant klingende Intervalle gestoßen. Noch viel mehr werden es, wenn die Teilungsschritte kleiner werden – 0,5cm, 3,3mm, 2,5mm, 1mm oder gleitend – dabei erscheinen bekannte, vertraute Intervalle auf wie manche schön klingende, aber noch nicht genau einzuordnende harmonische Zusammenklänge. Wenn man so ein Experiment wiederholt durchführt, wird sich die Zahl solcher Intervalle erhöhen, bis ein Punkt erreicht ist, wo man eine Trennung zwischen konsonant und dissonant klingenden Intervallen feststellt. Diese ist aber ganz individuell und wird zwischen 6 und 24 Intervallen pro Oktave liegen, ganz gleich, ob man praktizierender Musiker ist oder nicht, und ganz gleich, aus welcher Musikkultur man kommt. Die Länge der Saite spielt dabei keine Rolle, und man kann dieses Experiment nicht nur auf dem Monochord durchführen - es kann auch eine Violin- oder Cello-Saite sein, oder eine Gitarrensaite, die man von den Bünden (z.B. mit einem Radiergummi) gehoben hat.

Bei einem Monochord mit mehreren Saiten („Polychord") kann man die erhaltenen Teilungstöne auch mit der ungeteilten Saite vergleichen: hier gibt es immer einen schönen, reinen Zusammenklang durch konsonante Intervalle. Man kann bei einem langsamen Verändern des Teilungsstegs – hierzu benutzt man am besten eine geriffelte Münze, die von der Saite nicht abrutscht oder einen ähnlichen schmalen Gegenstand, den man mit der Kante auf die Saite drückt - die „harmonischen" Töne sehr gut erkennen: Wenn ein Schwingungsknoten genau erfasst wird, d.h. wenn der Teilungspunkt auf der Saite mit einem Schwingungsknoten zusammenfällt, dann klingen die Töne rechts und links des Teilungspunktes sehr rein, auch im Zusammenklang.

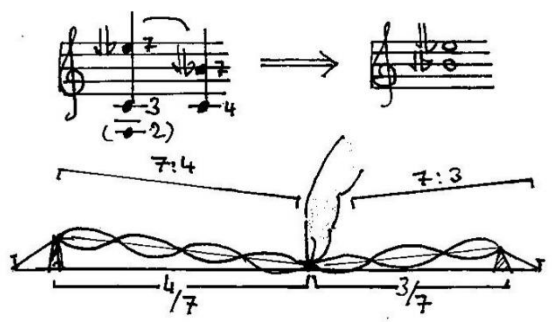
Flageolett

Eigenartigerweise gibt es die französisch klingende Bezeichnung nur im Deutschen. Man verwendet sie, wenn eine Saite nur schwach angedrückt wird, dass sie auf beiden

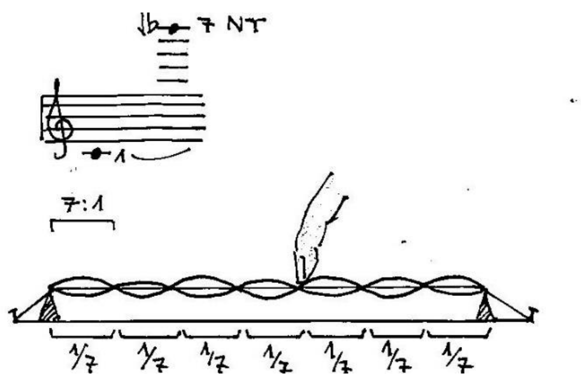
Saitenteilen weiterschwingt, und das ist der Fall, wenn die Berührungsstelle mit bestimmten Schwingungsknoten übereinstimmt. Die Töne, die man dann hört, sind Naturtöne. Deswegen nennt man Flageolett im Französischen „sons harmoniques“, im Italienischen entsprechend „suoni armonici“ und im Englischen schlicht „harmonics“. Die Naturtonreihe steigt zunächst ja schnell an, und deswegen sind diese Töne hoch und klingen flötenähnlich. Und davon kommt das deutsche Wort Flageolett (flageol, Flöte). Weil diese Töne auf einem Streich-instrument sauber zu entwickeln und im Spiel einzusetzen viel Üben und Geduld erfordert, kann das Sprichwort „Ich werde Dir die Flötentöne schon beibringen“ seinen Ursprung in der Musikpraxis haben, obwohl es mit den Flöten selbst nur wenig zu tun hat.

Berührt man die Saite mit der Münze oder mit dem Fingernagel ohne zu dabei zu drücken – um sie beim Schwingen am Ort zu halten – dann kann man die Schwingungsknoten feststellen und es lassen sich die Naturtöne hören. Allerdings nicht der Reihe nach, denn die Schwingungsknoten der Naturtöne verteilen sich auf der ganzen Saite in gleichen Abständen. So klingt der 7.Naturton völlig klar an seinen 6 Teilungspunkten: 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 und 6/7 der Saitenlänge. – Anders ist es, wenn der Teilungspunkt auch nur einen Bruchteil vom Schwingungsknoten entfernt ist: Dann tritt eine „Rauheit“ in den Klang - auf beiden Seiten, und es bedarf nur einer leisen Verschiebung, dass sich diese Rauheit in Reinheit auflöst.

Dazu ein kleines Experiment: Mit dem Steg oder gedrückter Saite sucht man etwa 3-4 Finger breit von der Saitenmitte entfernt den Punkt, an dem die Saitenteile das Quart-Intervall 4/3 bilden. (sehr einfach zu hören). Diesen Punkt berührt man nun wie oben angegeben mit Fingernagel, Plektrum oder Münze, und nun klingt auf beiden Saitenteilen der gleiche Ton, nämlich der 7.Naturton, die Natur-Septim. Man kann auch jeden anderen Knotenpunkt (1/7, 2/7 etc.) benutzen, der Ton bleibt derselbe.



Saitenteilung: 4/7 : 3/7 = 4/3 (Quart)



Flageolett: 1 : 1/7 = 7/1 (7.Naturton)

Dieses Beispiel gilt für den 7.Naturton. Natürlich gibt es viele andere auch, deren Schwingungsknoten zwischen denen des 7.Naturtons liegen und über die ganze Saite verteilt sind. Allein auf einer Cello-Saite kann man an die 60 Punkte ausmachen, an denen etwa 30 solcher „Natur-Flageolett“-Töne hörbar werden.

Diese Anregung steht nun am Schluss des Themas Saitenteilung. Wenn wir uns dem nächsten Thema, der Obertonreihe zuwenden, kommen wir nicht umhin, auf die Saitenteilung zurückgreifen zu müssen. Diese verschiedensten Arten der Saitenteilung steht am Beginn der Beschäftigung des Menschen mit den Grundlagen der Töne, nicht erst bei Pythagoras, sondern schon 2 ½ Jahrtausende vorher bei den Sumerern in Mesopotamien, deren Laute von Ur das wohl älteste, rekonstruierbare Saiteninstrument der Welt war.

Musik gab’s natürlich schon lange vor dieser Zeit, davon zeugen Knochenflöten aus der jüngeren Steinzeit mit Fundorten in der schwäbischen Alb (ca. 30.000 Jahre alt) und

Slowenien (mehr als 40.000 Jahre alt). Auf solche Instrumente kommen wir noch zu sprechen, aber dann im Zusammenhang mit der Untertonreihe. Zunächst geht es aber zu den „Obertönen".

Die Obertonreihe

(Partialtonreihe, Naturtonreihe)

Wir erinnern uns: Die Teilung der Saite in zwei Hälften erfolgte durch einen Teilungspunkt in der Mitte, zu hören war (im Vergleich zur ungeteilten Saite) die Oktave. Bei zwei Teilungspunkten waren die Quinte 3/2 und deren Oktave (= Oberquinte 3/1) das Ergebnis. Bei der Vierteilung (3 Teilungspunkte) gab es schon 3 Ergebnisse, nämlich die Teilung in der Mitte (Oktave 2/1) oder die Teilung der beiden Hälften: hier taucht die Quarte 4/3 auf und die Doppeloktave des Grundtons der leeren Saite 4/1. Wir sind damit von der Mitte weg mit dem Teilungssteg in Richtung Saitenende gerückt, und dies lässt sich weiter fortsetzen:

abgeteilte Saitenlänge	- übrige Saitenlänge	Intervall -	Restintervall (der übrigen Saitenlänge)	
.				
1/2	1/2	2/1	2/1	Oktav
1/3	2/3	3/1	3/2	Quint
1/4	3/4	4/1	4/3	Quart
1/5	4/5	5/1	5/4	gr.Terz
1/6	5/6	6/1	6/5	kl.Terz
1/7	6/7	7/1	7/6	
1/8	7/8	8/1	8/7	
1/9	8/9	9/1	9/8	gr.Sekund
1/10	9/10	10/1	10/9	kl.Ganzton
:	:	:	:	
1/16	15/16	15/1	16/15	Halbton

Man sieht: Die Werte in der Reihe der bekannten Intervalle, jetzt „Restintervalle" genannt, werden immer kleiner und nähern sich dem Wert 1, ohne ihn jemals zu erreichen, auf der anderen Seite steigen die Intervall-Werte des schrittweise kürzer werdenden Seitenteils mehr und mehr an, schließlich (theoretisch) gegen unendlich.

Dies sind die Obertöne der klingenden ungeteilten, leeren Saite. Sie klingen mit der Grundschwingung mit und überlagern diese.

Wenn die leere Saite beispielsweise eine Grundschwingung von 100 Hz hat, dann ist deren erster Oberton die Oktave 2/1 mit der doppelten Frequenz 200 Hz, der 2.Oberton ist die Oberquinte 3/1 mit der dreifachen Frequenz = 300 Hz; der 3.Oberton die Doppeloktave mit doppelten Frequenz der 1.Oktave, also = 400 Hz, der 4.Oberton ist die Oberterz mit der 5-

fachen Frequenz der leeren Saite = 500 Hz. Mit der Oktave der Oberquinte geht es weiter (2x300 Hz = 600 Hz), und dann folgt der nächste Oberton mit 700 Hz und so fort.

Damit man sich's aber mit dem Rechnen einfacher machen kann, benennt man den Grundton mit der Ziffer 1, er ist dann der 1.Naturton (auch 1.„Partialton" genannt, im Englischen ganz einfach „first harmony"), und dann geht die Obertonreihe an Stelle des 1.Obertons mit dem 2.Naturton los – mit der Oktave 2/1. Deren Oktave ist dann der 4.Naturton (Intervall 4/1), und deren Oktave wiederum der 8.Naturton (Intervall 8/1).

Die folgende Tabelle zeigt die Reihe der Naturtöne auf dem Grundton A = 110 Hz, einem tiefen A. (im Prinzip wie im vorangegangenen Beispiel mit der Grundfrequenz 100 Hz)

abgeteilte Saitenlänge	Intervall	Tonzahl	Frequenz(Hz)	Ton, Intervall (zum Grundton/Oktav)	
1/1	1/1	1	110	A	Grundton (Prim)
1/2	2/1	2	220	A	Oktav
1/3	3/1	3	330	e	Oberquint
1/4	4/1	4	440	a	Doppeloktav
1/5	5/1	5	550	c#'	Terz (zu 4)
1/6	6/1	6	660	e'	Quint (zu4)
1/7	7/1	7	770	↓g'	Naturseptim (zu 4) *)
1/8	8/1	8	880	a'	Oktav (zu 4)
1/9	9/1	9	990	h'	Sekund (9:8)
1/10	10/1	10	1100	c#"	Terz (10:8)
:	:	:	:	:	
1/16	16/1	16	1760	a"	Oktav (zu 8)
:	:	:	:	:	

*) Die Naturseptim ist um 1/3-Halbton kleiner als die kleine Septim (782 Hz)

An diesem Beispiel ist sehr klar zu erkennen, dass die Frequenzen der Obertöne von Ton zu Ton um die gleiche Frequenz stufenartig ansteigen, nämlich als Vielfache der Frequenz des Grundtons. Und diese Vielfache sind die Tonzahlen der betreffenden Töne. Die Tonzahl entspricht ihrer Proportion zum Grundton 1. (z.B. Proportion 11/1 = Tonzahl 11.) So ergibt sich für die Frequenzen der Naturtöne folgende einfache Formel:

$$f_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{n} \cdot f_0 \text{ (Hz)};$$

dabei ist f_n die Frequenz des Tons mit der Tonzahl ***n*** und f_0 die Frequenz des Grundtons. Dies macht den Umgang mit Naturtönen höchst einfach: man operiert mit ganzen Zahlen, und um ihre Tonhöhen zu fixieren, multipliziert man diese mit der Grundfrequenz.

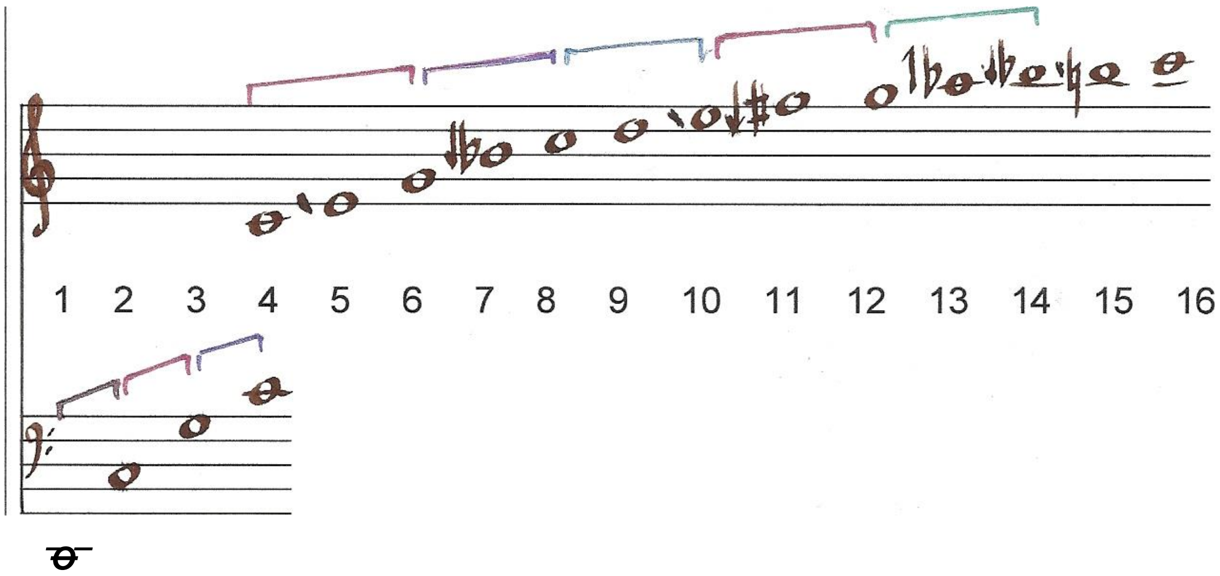
Und daraus folgt, dass, um die Proportion eines Natur-Intervalls zu berechnen, es nur noch nötig ist, die Tonzahlen zueinander ins Verhältnis zu setzen:

$$f_{\mathbf{n}} \text{ (Hz)} \;/\; f_{\mathbf{m}} \text{ (Hz)} = \boldsymbol{n} / \boldsymbol{m};$$

Die Naturtonreihe ist nichts anderes als eine Zahlenreihe, deren Zahlen den Faktor angeben, mit welchem die Grundfrequenz f_0 zu multiplizieren ist, um die Frequenz der betreffenden Töne zu erhalten. Ihre Frequenzverhältnisse entsprechen den Verhältnissen der Tonzahlen zueinander, und diese bezeichnen die Intervallgrößen.

Beispiel: Der 14.Naturton mit der Grundfrequenz 110Hz hat die Frequenz 14x110Hz = 1540 Hz. Das Verhältnis zum 11.Naturton mit 1210 Hz (= 11x110Hz) ist also 1540Hz : 1210Hz = 14/11. Das ist eine Proportion aus ganzen Zahlen, die diesen beiden Tonzahlen entsprechen. Man braucht also nur die Tonzahlen in Beziehung zu setzen, um die Intervallgröße zu bestimmen.

Bei den Naturtönen nicht mehr mit Frequenzen rechnen zu müssen, vereinfacht den Umgang mit ihren Intervallen sehr. Die folgende Skala zeigt die Naturtöne auf dem Grundton C bis zum 16.Naturton (Tonzahlen 1 – 16):



←1.→←-- 2.---→ ←----- 3.Okt.------→ ←---------------------- 4.Oktave -------------------------→

Mit dem 16.Naturton ist bereits die 4.Oktave erreicht, und in jeder Oktave hat sich die Zahl der darin enthaltenen Töne bereits verdoppelt (Grundton mitgerechnet):

1.Oktave: 1 Ton, $1 = 2^0$

2.Oktave: 2 Töne, $2 = 2^1$

3.Oktave: 4 Töne, $4 = 2^2$

4.Oktave: 8 Töne, $8 = 2^3$

Die folgende Oktave bis zum 32.Naturton enthält dann schon 16 Töne, die wie die vorangegangenen 16 Töne innerhalb der 4 Oktaven jeweils um die Hälfte kleiner geworden sind. Das Tonmaterial verdoppelt sich also von Oktave zu Oktave, während sich die Tonstufen um die Hälfte verkleinern.

Am Notenbeispiel kann man gut erkennen, dass die Verdoppelung der Tonzahl einer Oktavierung entspricht:

Die Intervalle der Naturtonreihe sind anhand der Tonzahlen höchst einfach abzulesen: Man braucht nur zwei Zahlen ins Verhältnis zueinander setzen (zweckmäßig die höhere Zahl mit der tieferen, damit die Proportion aus beiden Zahlen größer als 1 ist), und es ergibt sich die entsprechende Intervallgröße. Wir beginnen zunächst mit nebeneinander liegenden Zahlen, denn diese bilden bereits einen großen Teil der geläufigen Intervalle:

Tonzahl 1-2: Oktave = 2/1, Tonzahl 2-3: Quinte 3/2, Tonzahl 3-4: Quarte 4/3,
Tonzahl 4-5: große Terz 5/4, Tonzahl 5-6: kleine Terz 6/5, Tonzahl 6-7: kleine septimale Terz 7/6, Tonzahl 7-8: septimaler Ganzton 8/7, Tonzahl 8-9: Ganzton 9/8.

Es folgen die Intervalle 10/9 (kleiner Ganzton), 11/10, 12/11 („Dreivierteltöne"), 13/12, 14/13, 15/14 („ekmelische Töne"), 16/15 (Halbton), 17/16, 18/17. Auch die beiden letztgenannten Proportionen sind vom Gehör als Halbton zu erkennen, doch die weiteren Proportionen 19/18, 20/19, 21/20 usw. werden bereits zu den „Mikro-Intervallen" gezählt. Sie nähern sich in ihrer Größe immer mehr der 1, während ihre Tonzahlen selbst immer größer werden und theoretisch gegen unendlich gehen. Ab 256/255 können selbst geübte Musiker bei fortschreitenden Tonzahlen kaum Veränderungen in der Tonhöhe mehr feststellen: Hier ist die Hörgrenze erreicht. (ca. 6C). Und dabei sind beim Naturton 256 (=2^8) gerade einmal 8 Oktaven überschritten worden - das ist etwas mehr als der Tonraum eines Konzertflügels!

Eine Verdoppelung der Tonzahl kommt einer Oktavierung gleich, denn in der höheren Oktave ist die Schwingungsfrequenz bekanntlich doppelt so hoch. Auf diese Weise kann man in der Obertonreihe schnell und einfach viele Tonstufen benennen:

Grundton C und dessen Oktaven:	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 …
Quinte G mit Oktaven:	3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 …
große Terz E mit Oktaven:	5, 10, 20, 40, 80, 160 …
Naturseptim B mit Oktaven:	7, 14, 28, 56, 112, 224 …

In der 4.Oktave kommen die None 9, der 11. und 13.Naturton und die große Septim 15 hinzu, deren Oktaven als Tonzahl-Verdoppelung in den höheren Oktaven wieder aufscheinen. Auf diese Weise wird eine vollständige, strukturierte Zahlenreihe gebildet, aus deren Zahlen sich alle musikalischen Intervalle bilden lassen (vgl. die folgende Tabelle). Eine besondere Rolle spielen dabei die Primzahlen: Jede neue Primzahl bringt eine neue Tonart hervor, für die die gleichen Regeln der Naturtonreihe gelten. (S. Tonverwandtschaften)

Die Quinte beispielsweise hat immer das Verhältnis 3:2, bzw. 6/4, 9/6, 12/8, 15/10, 18/12, 21/14 … Wenn man diese beiden Proportionszahlen in der Skala abliest, entspricht das im Notenbild immer einer reinen Quinte.

Entsprechend die Quarten: 4/3, 8/6, 12/9, 16/12 …

Und große Terzen: 5/4, 10/8, 15/12 … und auch die kleinen Terzen: 6/5, 12/10, 18/15 …

Man kann praktisch jede Zahl mit einer beliebigen anderen Zahl ins Verhältnis setzen (damit der Intervallwert >1 ist, soll die höhere Zahl immer im Zähler sein!), und es ergeben sich musikalische Intervalle, die sich an der Naturton-Skala (vgl. die Darstellung der Obertonreihe auf C) ablesen lassen. Dabei spielt es keine Rolle, wie weit sie voneinander entfernt sind, denn durch Oktavieren (Verdoppeln) nach oben oder nach unten (Halbieren, wenn es sich um eine gerade Zahl handelt) lassen sich die Zahlen in einer Oktave unterbringen.

Zum Beispiel: 13/5 => 13/10 = erhöhte Terz; oder: 14/5 => 7/5 = Natur-Tritonus.

Allein aus den ersten 16 Naturtönen ergeben sich eine Menge Intervalle, von denen ein großer Teil noch nicht in westlich-abendländischen Tonsystemen vorkommt, wie zum Beispiel die gerade erwähnten Intervalle 13/10 oder 7/5. Doch bis auf den Tritonus (der mit 45/32 angegeben wird) sind alle bekannten gebräuchlichen Intervalle in diesen ersten 16 Tonstufen der Naturtonreihe enthalten:

2/1 (Oktave), **3/2** (Quinte), **4/3** (Quarte), **5/4** (große Terz), **6/5** (kleine Terz), **5/3** (große Sext), **8/5** (kleine Sext) , **9/8** (auch 10/9, Sekund, Ganzton), **9/5** (auch 16/9, kleine Septim), **15/8** (große Septim), **16/15** (kleine Sekund, Halbton).

Die Tonzahlen, nach Oktaven geordnet:

1

2 3 4

4 5 6 7 8

8 9 10 11 12 13 14 15 16

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 5455 56 57 58 59 60 61 62 63 64

64 – 128

128 – 256

Mit jeder Oktave verdoppelt sich die Zahl der in ihnen enthaltenen Töne.

Mit jeder ungeraden Zahl kommt ein neuer Ton hinzu.

Harmonische Teilung

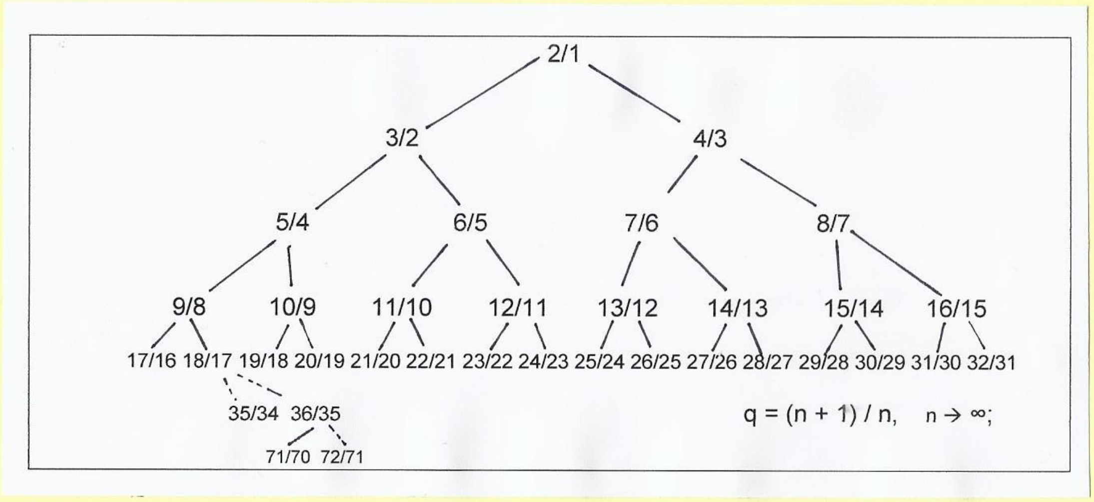
Mit der Einteilung der Oktave in 12 gleiche Halbtöne und ausgestattet mit mechanischen Tasteninstrumenten mit je 12 Tasten (7 weiße, 5 schwarze) pro Oktave hat man es sich angewöhnt, die Tonstufen linear ansteigend zu *sehen* und die Mitte der Oktave beim Tritonus-Intervall zu vermuten. Wenn wir aber *hören*, dann liegt die Mitte, die harmonische Mitte, bei der Quinte. Ihr Verhältnis zum Grundton ist 3:2, und ihr Verhältnis zur Oktave 4:3.

3/2 und 4/3 sind harmonische Teile der Oktave 2/1 - wenn man sie nicht arithmetisch halbiert, sondern in zwei Quotienten geteilt hat: 2/1 = 3/2 x 4/3. Wenn man diese Teile miteinander multipliziert, ergibt sich wieder die Oktave. Das geht mit anderen Proportionen natürlich auch, z.B. 8/7 x 7/4, doch sind 3/2 und 4/3 entschieden die mit den kleinsten Zahlen besetzten und am nächsten zur „Mitte“ stehenden Intervalle: Nur sie teilen die Oktave harmonisch. Entsprechend lassen sich auch die Teilungsprodukte wieder teilen. Die Quinte teilt sich harmonisch in eine große und eine kleine Terz: 3/2 = 5/4 x 6/5.

Und die Quarte? – Deren Teilungsprodukte sind zwar harmonisch, aber der traditionellen „Harmonielehre“ unwillkommen, denn es handelt sich um die kleine septimale Terz 7/6 und den septimalen Ganzton 8/7:

4/3 = 7/6 x 8/7.

Einfacher geht’s, wenn man bei der großen Terz 5/4 fortsetzt, denn diese lässt sich in den großen und den kleinen Ganzton teilen: 5/4 = 9/8 x 10/9. Die kleine Terz 6/5 jedoch ebenfalls entsprechend zu teilen ist im herkömmlichen Sinn wiederum nicht gewünscht, denn die Ergebnisse passen wieder nicht in das gewohnte System: 6/5 = 11/10 x 12/11.



Setzt man die Teilung entsprechend fort, erhält man alle Intervalle, die zwischen benachbarten Tönen der Naturtonleiter bestehen.

Im Grunde lassen sich alle Intervalle harmonisch teilen, und je mehr man sie in sich teilt, führt das zu kleineren und kleineren, zu kleinsten Intervallen. Man kann sie berechnen, doch mit Hilfe der Naturtonleiter sind sie ganz einfach zu bestimmen. Man muss lediglich das Intervall auf seine Tonzahlen aufteilen, die es bilden (Zähler und Nenner), und die Tonzahl in deren Mitte heraussuchen.

1

2 3 4

4 5 6 7 8

8 9 10 11 12 13 14 15 16

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 5455 56 57 58 59 60 61 62 63 64

Beim Intervall 7/5 (Natur-Tritonus ist das recht einfach: zwischen Tonzahl 5 und 7 steht die 6. 6 im Verhältnis mit den beiden anderen Zahlen ergibt 6/5 und 7/6 (Intervalle immer >1!) Also:

$$7/5 = 6/5 \times 7/6;$$

Doch interessieren uns beim Teilen besonders Proportionen, bei denen der Zähler um 1 größer ist als der Nenner. Wie kann man beispielsweise den Ganzton 9/8 teilen? Zwischen den Tonzahlen 8 und 9 gibt es keine weitere. In diesem Fall muss man in die höhere Oktave gehen: Die gleichen Töne sind dort 16 und 18. Und dazwischen liegt die 17. Und so ergibt sich:

$$9/8 = 17/16 \times 18/17;$$

Die harmonische Mitte

Auf die gleiche Art lässt sich jedes beliebige Intervall teilen. Uns interessiert einmal, in welche Intervalle sich die Naturseptim 7/4 harmonisch teilen ließe. Zwischen 4 und 7 liegen zwei Zahlen: 5 und 6. Damit ergäben sich 2 Lösungen: 5/4 x 7/5 = 7/4 und 6/4 (=3/2) x 7/6 = 7/4. Doch beide liegen nicht in der Mitte. Deshalb muss man auch hier die Lösung in der nächsten Oktave suchen: die Tonzahlen 7 und 4 sind dort 14 und 8. Die Differenz dieser Zahlen ist 6, und die Mitte finden wir, indem wir von der größeren Zahl um 3 Schritte nach unten und von der niedrigeren 3 Schritte nach oben gehen: 14 – 3 = 8 + 3 = 11. Die gesuchten Intervalle sind dann 11/8 und 14/11. Und tatsächlich: 11/8 x 14/11 = 14/8 = 7/4.

Für Rechenkünstler: Wie lässt sich das Intervall 83/62 harmonisch teilen? – Das Intervall klingt nach einer fast reinen Quarte, die Teilungen ergeben einen fast perfekten septimalen Ganzton 8/7 und eine ebensolche septimale Kleinterz 7/6 – doch das exakte Ergebnis ist: 166/145 und 145/124. Die Dezimalzahlen dieser Proportionen unterscheiden sich von denen der genannten reinen Intervalle 8/7 und 7/6 erst in der dritten Stelle nach dem Komma.

Harmonische Mitte aus 2 Intervallen: Der Rechenvorgang ist ähnlich, doch muss zunächst ein gemeinsamer Nenner gefunden werden. Als Beispiel: Die harmonische Mitte von Naturseptim 7/4 und Quarte 4/3 wird gesucht. – Gemeinsamer Nenner ist 12, aus 7/4 wird 21/12, aus 4/3 wird 16/12. Nun muss nur noch die harmonische Mitte aus 16 und 21 gefunden werden, und die liegt in der nächsten Oktave, zwischen 32 und 42. Und das ist 37. Die beiden Teilungsintervalle sind also 42/37 und 37/32, die harmonische Mitte ist das Intervall 37/24.

Wie groß ist dieses Intervall? Auch das lässt sich ablesen: Der 37.Naturton von C aus ist ein um einen Viertelton erhöhtes D (9, 18, 36 = D). E^{b} wäre in diesem Fall der 38., E der 40. Naturton. Der 37. Naturton ist ziemlich genau ein Viertelton höher als der 36. Die Tonzahl 24 dagegen entspricht der reinen Quint G (3, 6, 12, 24). Das gesuchte Intervall ist also um einen Viertelton erhöhte Quint und steht harmonisch in der Mitte zwischen der Quarte 4/3 und der Naturseptim 7/4.(- N.B.: In Cent gerechnet nimmt die harmonische Mitte von 4/3 und 7/4 nicht 733.4C ein (4/3 = 498C, 7/4 = 968,8C, arithmetische Mitte: 733,4C), sondern 749,4C (4/3 = 498C, 37/24 = 749,4C, harmonische Mitte, 7/4 = 968,8C). Es besteht ein Tonhöhenunterschied zwischen den Teilungsintervallen: 251,4C und 219,4C. Das ist logisch, denn in der Naturtonreihe werden die Tonhöhenunterschiede nach oben hin stetig kleiner.