

## SAITENTEILUNG UND INTERVALLE II

Zu Beginn möchte ich die Ergebnisse der bisherigen Teilungen (2-5) in einer Übersicht zusammenfassen:

Teilung	Saitenteile	Intervall aus dem Verhältnis	Intervall aus dem Verhältnis
Intervall aus dem Verhältnis	der Saitenteile zueinander	der ganzen Saite zur geteilten	
1/2	1/2 + 1/2	2/1	1/1
1/3	1/3 + 2/3	3/1 u. 3/2	(3/1 : 3/2=) 2/1
1/4	1/4 + 3/4, 2/4 + 2/4	4/1 u. 4/3, 2/1 (=4/2)	3/1, 1/1
1/5	1/5 + 4/5, 2/5 + 3/5	5/1 u. 5/4, 5/2 u. 5/3 *)	4/1 u. 3/2

\*) 5/3 ist die Proportion der großen Sexte, die anderen Intervalle sind große Terzen im Oktav-Abstand:  $5/4 - 5/2 - 5/1$ . (vgl.  $= 5/4 - 10/4 - 20/4 \rightarrow 5 : 10 : 20 = 1 : 2 : 4$ )

Weil Wellenlänge und Frequenz umgekehrt proportional zueinander stehen (je kleiner die Wellenlänge, desto größer die Frequenz – je kleiner die Frequenz, desto größer die Wellenlänge), gilt dies entsprechend auch für die Saitenlängen als Teillängen (z.B. 1/5) und für das Frequenz-Verhältnis der Teil-Frequenzen (hier entsprechend: 5/1).

Bei der Saitenteilung sind die Saitenteile immer kleiner als 1, weil die Länge der ganzen Saite =1 ist. (z.B. 4/5 oder 4:5) Die Frequenzverhältnisse der durch Saitenteilung erzeugten Töne sind dagegen immer größer als 1, weil die ungeteilte Saite nur ihren Grundton 1 hat - mit der Proportion 1/1. Dem Beispiel mit dem 4/5-Teil der Saite folgend, entspricht diesem das Intervall 5/4 (oder 5:4), die große Terz. Um Missverständnisse zu vermeiden, sollten Intervallproportionen immer mit der größeren Zahl im Zähler benannt werden, z.B. 6/5 – denn 5/6 ist ein Teil einer Saite, der bei der Sechstel-Teilung (dieser Saite) entsteht, das 6/5- Intervall ist das Frequenzverhältnis im Zusammenklang des größeren Saitenteils (5/6 : 1/6) mit der ungeteilten Saite. (1/1 = 1).

### Teilung in Sechstel: Die kleine Terz

Damit haben wir eines der Ergebnisse der Sechstel-Teilung bereits vorweggenommen: bei dieser Teilung gibt es drei verschiedene Ergebnisse:

1/6 + 5/6, 2/6 + 4/6, 3/6 + 3/6. Die weiteren Teilungsergebnisse 4/6 + 2/6 und 5/6 + 1/6 spielen deshalb keine Rolle, weil sie den ersten beiden gleichen: In der Addition können die Summanden beliebig vertauscht werden. Zusätzlich führt die Teilung der Saite in 2/6 und 4/6 (bzw. in 4/6 und 2/6) zum gleichen Ergebnis wie die Drittelteilung

in  $1/3$  und  $2/3$ , die Teilung in  $3/6$  und  $3/6$  entspricht selbstverständlich der Halbierung der Saitenlänge.

So bleiben im Vergleich zur Schwingung der ungeteilten Saite nur die Intervalle  $6/1$  und  $6/5$  übrig.  $6/1$  ist die Oktave zu  $3/1$ , und diese wiederum ist die Oktave zur Quinte  $3/2$  – es sind also alles Quinten,  $6/1$  ist Doppeloktave der wohlbekannteren Quinte  $3/2$ .

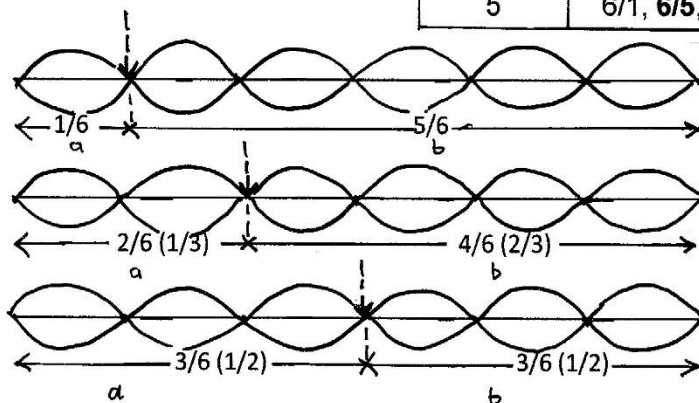
Das andere Intervall  $6/5$  ( $6:5$ ) ist das einzige durch die Sechstel-Teilung neu Hinzugekommene. Es ist die kleine Terz, die sich mit der großen Terz  $5/4$  zur Quinte ergänzt und somit den Dreiklang bildet:  $6/5 \times 5/4 = 3/2$  – doch welchen Dreiklang? In der Mathematik lassen sich die Faktoren in einer Multiplikation vertauschen – doch in der Musik spielt die Reihenfolge der aufeinanderfolgenden Intervalle eine entscheidende Rolle: Steht die große Terz  $5/4$  unter der kleinen Terz  $6/5$ , dann ergeben sie zusammen zwar eine Quinte, der Dreiklang aber ist, weil wir den Zusammenklang von unten nach oben hören, ein Dur-Dreiklang  $4:5:6$ , gebildet aus den Intervallen  $5/4$ ,  $6/5$  und  $3/2$  ( $=6/4$ ). Steht aber die kleine Terz  $6/5$  unter der großen ( $5/4$ ), ergibt sich ebenfalls eine Quinte, der Dreiklang ist aber ein Moll-Dreiklang (gebildet aus den Intervallen  $6/5$ ,  $5/4$  und  $3/2$ ). Korrekterweise müsste er in Zahlenverhältnissen als  $6:5:4$  geschrieben werden, also in umgekehrter Reihenfolge. Dass dies tatsächlich so ist, werden wir im Zusammenhang mit der „Unterton-Skala“ erfahren. Vorerst halten wir einmal fest:

Die Sechstel-Teilung der Saite führt zur kleinen Terz  $6/5$ .

Und damit haben wir neben einem Dur-Dreiklang C-E-G mit der großen Terz E aus der Fünftelteilung nun mit dem Es aus der Sechstelteilung auch den Moll-Dreiklang C-Es-G erhalten. Es ist aber nicht der erste Moll-Dreiklang: Mit dem  $5/3$ -Intervall aus der Fünftelteilung hatten wir bereits die große Sexte A und mit der großen Terz  $5/4$  aus der gleichen Teilung auch das E zur Verfügung. Zusammen mit dem Grundton C ergibt sich bereits hier ein Moll-Dreiklang: a-moll, allerdings in der Umkehrung C-E-A.

Die Saitenlängen der in 6 Teile geteilten Saite haben zueinander die Längenverhältnisse  $1:5$ ,  $2:4$  und  $3:3$ . Die beiden letzten Verhältnisse  $2/4 = 1/2$  und  $3/3 = 1/1$  kennen wir von der Drittel-Teilung und der Halbierung her bereits, und damit ist das einzig neue Intervall, das bei der Sechstelteilung beim Vergleich der Saitenteile hinzukommt, die Terz  $5/1$ . Sie ist um eine Oktave höher als die Oberterz  $5/2$ , die wiederum 1 Oktave höher ist als die Terz  $5/4$ .

Saitenteilung	Teillängen a u. b	Verhältnis a:b
1/6	1/6+5/6; 1/3,+2/3; 1/2+1/2	1:5, 1:2, 1:1
Teilungspunkte	Intervalle	Intervalle a:b
5	6/1, <b>6/5</b> , 3/1, 3/2, 2/1	5/1, 2/1 1/1



## Die Siebtel-Teilung: Entdeckung einer neuen Welt

Meistens enden die Darstellungen der Saitenteilungen mit der Teilung in 6 Teile. Die Zahl 7 wurde bisher aus unterschiedlichen Gründen, von religiösen bis zu musikalisch-weltanschaulichen Gründen, verpönt, verworfen oder ausgelassen. Dabei gibt es nicht einmal musikalisch belegbare Begründungen dafür – auch wenn Intervalle mit der Zahl 7 in ihrer Proportion nicht zur europäisch geprägten abendländischen Musik passen, so gibt es eben doch Tonsysteme, wo sie gebraucht werden, so z.B.  $7/4$  und  $8/7$  in der byzantinischen oder  $7/6$  (und  $12/7$ ) in der arabischen Musik.

Bei der Teilung der Saite in 7 Teile kommen gleich 6 neue Intervalle hinzu:

Saitenteile:  $1/7 + 6/7$ ,  $2/7 + 5/7$ ,  $3/7 + 4/7$

Intervalle:  $7/1$ ,  $7/6$ ,  $7/2$ ,  $7/5$ ,  $7/3$  und  $7/4$ .

Beim Vergleich der Saitenteile zueinander sind uns wohlbekannte Intervalle behilflich. Beim ersten Teilungspunkt  $1/7$ , bzw.  $6/7$  ist die um eine Oktave erhöhte Oberquinte  $6/1$ , also die Oktave über der Oberquint  $3/1$ , und diese ist wiederum die Oktave der Quint  $3/2$ .

Beim zweiten Teilungspunkt kann man die Oberterz  $5/2$  ( $2/7$  zu  $5/7$ ) gut hören, und noch einfacher geht es beim 3. Teilungspunkt (3 zu 4), hier ist es die reine Quarte  $4/3$ , die erklingt.

Zwischen den neuen Intervallen  $7/1$ ,  $7/2$ ,  $7/3$ ,  $7/4$ ,  $7/5$  und  $7/6$  gibt es einige Oktav-Verhältnisse:  $7/1$  zu  $7/2$  und  $7/2$  zu  $7/4$  sind Oktaven. ( $4 : 2 : 1$ ), und auch  $7/3$  zu  $7/6$  ( $2 : 1$ ). Hinzu kommt noch, dass die Intervalle  $7/4$ ,  $7/5$  und  $7/6$  einen reinen Dreiklang bilden, nämlich  $4:5:6$ . Weil wir aber, wie schon erwähnt, einen Klang von unten nach oben mit dem Gehör analysieren, und das kleinere Intervall aus  $7/6$  und  $7/5$  unten steht, ist es ein Moll-Dreiklang  $6:5:4$ . Die Tonart, in der dieser Moll-Dreiklang steht, ist

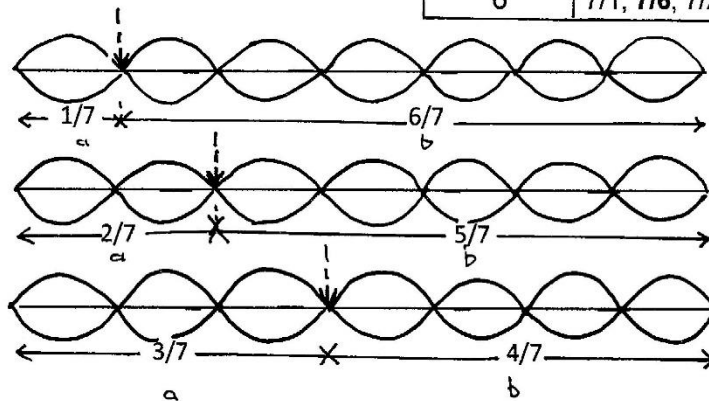
in unserem gewohnten Tonsystem nicht bekannt: es ist der Dreiklang von einem um  $\frac{1}{3}$  Halbton erniedrigten Es.

Aber es geht noch weiter: Weil (bis auf  $\frac{7}{5}$ ) vornehmlich Oktav-Verdopplungen vorkommen, kann man gleich alle durch 7-Teilung erhaltenen Töne zueinander ins Verhältnis setzen.

Mit  $\frac{7}{7} : \frac{7}{6} : \frac{7}{5} : \frac{7}{4} : \frac{7}{3} : \frac{7}{2} : \frac{7}{1}$  erhält man die Reihung  $7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ , und dies ist ein Teil der Untertonreihe, von unten beginnend mit dem C ( $\frac{7}{7}$ ), das in diesem Fall der 7. Unterton einer Untertonreihe ist, die mit dem 7. Partialton ( $\frac{7}{1}$ , Oberton) der ungeteilten Saite C beginnt. Das klingt sehr kompliziert und verwirrend – doch im Zusammenhang mit Ober- und Untertonreihen wird die Geschichte sehr einfach und leicht verständlich. Da werde ich noch einmal auf diesen Fall zurückkommen. Vorerst können wir uns damit zufrieden-geben, dass wir im Zusammenhang mit der ganz gewöhnlichen und bekannten Saitenteilung eine neue Welt betreten haben. Wie Arnold Schönberg einmal sagte: „Ich spüre die Luft von anderen Planeten.“

Zum Abschluss: Über die durch Vergleich der Saitenteile entstandenen Intervalle wurde bereits gesprochen - die oktavierte Oberquint  $6:1$ , die Oberterz  $5:2$  und die Quarte  $4:3$ . Hier sind sie noch einmal alle in der Übersicht:

Saitenteilung	Teillängen a u. b	Verhältnis a:b
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7} + \frac{6}{7}; \frac{2}{7}, + \frac{5}{7}; \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$	$1:6, 2:5, 3:4$
Teilungspunkte	Intervalle	Intervalle a:b
6	$\frac{7}{1}, \frac{7}{6}, \frac{7}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}$	$6/1, 5/2, 4/3$



### Achtel- und Neuntel-Teilung und weitere Teilungen

Auf die gleiche Weise können die Teilungen fortgesetzt werden. Technisch wird man jedoch auf Schwierigkeiten stoßen, weil die Spannung des dabei ständig kleiner werdenden Teils der Saite zunimmt und dadurch die Ergebnisse von der Theorie abweichen, die eine gleichbleibende Saitenspannung voraussetzt.

Die Teilungen in  $\frac{1}{8} + \frac{7}{8}, \frac{2}{8} + \frac{6}{8}, \frac{3}{8} + \frac{5}{8}, \frac{4}{8} + \frac{4}{8}$  liefern

die Intervalle  $8/1, 8/7, 8/2, 8/6, 8/3, 8/5$  und  $8/4 (2/1)$ .

Weil  $\frac{8}{2} (= \frac{4}{1})$  und  $\frac{8}{6} (= \frac{4}{3})$ , als auch  $\frac{8}{4} (= \frac{4}{2})$  in der Viertelteilung bereits vorgekommen sind, können wir sie hier als bereits bekannt getrost weglassen, ebenso das Intervall  $\frac{8}{3}$ , das die Oktave der Quarte  $\frac{4}{3}$  ist. So bleiben übrig: eine

ganz hohe Oktave (die vierte Oktave!) des Grundtons der ungeteilten Saite  $1/1$  mit den Oktaven  $2/1$ ,  $4/1$  und  $8/1$ . Neu hinzugekommen sind das Intervall  $8/7$ , das die Naturseptim zur Oktave ergänzt ( $7/4 \times 8/7 = 2$ ), ein um  $1/6$  erhöhter Ganzton, und schließlich die gewohnte kleine Sexte mit der Intervallproportion  $8/5$ .

Zum Schluss sei noch die Neuntel-Teilung erwähnt, schon deshalb, weil durch sie der große Ganzton  $9/8$  definiert wird. Die Neuntel-Teilung ergibt folgende Teilungspunkte:

$$1/9 + 8/9, 2/9 + 7/9, 3/9 + 6/9, 4/9 + 5/9$$

mit den Intervallen  $9/1$ ,  $9/8$ ,  $9/2$ ,  $9/7$ ,  $9/3$ ,  $9/6$  ( $3/2$ )  $9/4$ ,  $9/5$ .

Wir haben hier den Ganzton  $9/8$  mit seinen 3 Oktaven:  $9/8$ ,  $9/4$ ,  $9/2$  und  $9/1$ . (die nächste wäre  $18/1$  usw.) Dieses Intervall hatten schon die alten Pythagoräer aus dem Unterschied von Quinte und Quarte errechnet:  $3/2 : 4/3 = 9/8$  und ihn „Tonos“ benannt und daraus die pythagoräischen Tonleitern entwickelt, die fast 2 Jahrtausende Bestand haben sollten. Guido von Arezzo hatte in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts n.Chr. diesen Tonos als Grundlage für die Lautenstimmung festgeschrieben, in stark verkürzter Form etwa folgendermaßen: „Man nehme den 9. Teil der Saite, dann hat man den ersten Ton (die Sekunde  $9/8$ ). Von diesem nehme man wiederum den 9. Teil und erhält die Terz ( $9/8 \times 9/8 = 81/64$ , die pythagoräische Terz natürlich!). Die Quarte erhält man durch Viertel- und die Quinte durch Drittelteilung. Von den verbliebenen  $2/3$  nehme man wiederum  $1/9$ ...“ Und so geht's weiter. Als im 15. Jahrhundert die reine, natürliche  $5/4$ -Terz an die Stelle der pythagoräischen Terz trat, musste man einen zweiten, etwas kleineren „Tonos“ mit dem Wert  $10/9$  einführen, denn dieser ergibt mit dem Tonos  $9/8$  die Terz  $5/4$ :  $9/8 \times 10/9 = 5/4$ . Weil's darüber natürlich Streit unter den Gelehrten gab, einigte man sich schließlich über eine Orgelstimmung, deren Ganzton zwischen dem kleinen und großen Ganzton lag. So kam die „mitteltönige Stimmung“ zu Stande.

Nach diesem kurzen Ausflug in die Musikgeschichte kehren wir wieder zur Saitenteilung zurück: Die Intervalle  $9/3$  und  $9/6$  sind natürlich die Quint  $3/2$  mit ihrer Oktave  $3/1$ , und so bleiben die Intervalle  $9/7$  und  $9/5$  noch zu erwähnen.  $9/7$  ist ein „verworfenes“ 7-er-Intervall, das aber eine eigene Klangcharakteristik hat. Weil es sich mit dem ebenfalls nicht gebräuchlichen  $7/6$ -Intervall zu einer Quint verbindet ( $9/7 \times 7/6 = 3/2$ ) und einen charakteristischen  $9:7:6$  – Dreiklang bildet, sollte dieser Akkord endlich einmal Verwendung finden. Er klingt einem Moll- Dreiklang ähnlich, wirkt aber weit weniger weich (molle = weich) als dieser.

$9/5$  ist eine kleine Septim, die mit dem vorhin erwähnten kleinen Ganzton  $10/9$  die Oktave bildet. Sie wäre eine logische Folge der bekannten Intervalle  $6/5$  (kleine Terz),  $8/5$  (kleine Sexte) -  $7/5$  wird ja nicht zugelassen – als  $9/5$ , der kleinen Septime. Somit hätten wir am Ende der 9-er Teilung den größten Teil der 12 Töne unseres Tonsystems bereits definiert. Bleiben nur noch die große Septim und die kleine Sekund. Die große Septim wird aus Quint und Terz gebildet ( $3/2 \times 5/4 = 15/8$ ), und ihr Kehrwert ( $8/15 \times 2 = 16/15$ ) ergänzt sie als kleine Sekund zur Oktave. Über den Tritonus, der als „Diabolus in musica“ in der Mitte des Tonsystems aus 12 Halbtönen sitzt, ist man sich auch heute noch nicht ganz einig. Allgemein setzt man ihn aus Ganzton und Terz zusammen:  $9/8 \times 5/4 = 45/32$  – und so klingt er auch. Schöner wäre der „natürliche“ Tritonus mit  $7/5$  – doch der ist ja verboten! – Es steckt eben noch immer der Teufel im Detail.

Wenn wir nun das Ergebnis der Teilungen im Gesamten betrachten, dann zeigen sich erstaunliche Zusammenhänge in den Zahlenfolgen, zunächst einmal schon optisch:

Teilung dem Verhältnis	Intervall aus dem Verhältnis der ganzen Saite zur geteilten	Intervall aus der
Saitenteile zueinander		
1/2	<b>2/1</b>	<b>1/1</b>
1/3	3/1, <b>3/2</b>	<b>2/1</b>
1/4	4/1, 4/2, <b>4/3</b>	3/1, 2/2
1/5	5/1, 5/2, <b>5/3, 5/4</b>	4/1, <b>3/2</b>
1/6	6/1, 6/2, 6/3, 6/4, <b>6/5</b>	5/1, 4/2, 3/3
1/7	7/1, 7/2, 7/3, <b>7/4, 7/5, 7/6</b>	6/1, 5/2, <b>4/3</b>
1/8	8/1, 8/2, 8/3, 8/4, <b>8/5, 8/6, 8/7</b>	7/1, 6/2, <b>5/3, 4/4</b>
1/9	9/1, 9/2, 9/3, 9/4, <b>9/5, 9/6, 9/7, 9/8</b>	8/1, 7/2, 6/3, <b>5/4</b>
1/10...	-----usw.-----	9/1, 8/2, 7/3, 6/4
1/11		10/1 9/2, 8/3, 7/4, <b>6/5</b>
1/12		11/1,10/2, 9/3, 8/4, <b>7/5</b>
1/13		-----usw.-----
--		
...		

Das liegt daran, dass die Zahl der Teilungspunkte kontinuierlich fortschreitet, während beim Vergleich der Teilungsabschnitte erst bei jeder 2. Teilung (mit „geraden“ Teilungszahlen) eine neue Vergleichsmöglichkeit hinzutritt. Die fett gedruckten Proportionszahlen zeigen die Intervalle in einer Oktave auf, nämlich die Werte zwischen 1/1 und 2/2. Man erkennt, dass sie in beiden Aufstellungen von oben nach unten in der gleichen Reihenfolge auftreten, mit Ausnahme der Naturseptim 7/4, die sich zwischen 6/5 und 7/5 gedrängt hat. Doch die Proportionen mit der Zahl 7 werden ja in unserem herkömmlichen Tonsystem sowieso nicht respektiert. Deshalb sind sie an dieser Stelle vorerst noch *kursiv* gedruckt.

Ebenfalls neu hinzu treten die Obertöne der Naturtonreihe von oben nach unten am linken Rand der Tabellen auf, in der Reihe 2/1, 3/1, 4/1 usw., und hier kann die 7 als natürliche Zahl nicht mehr ausgeschlossen werden wie auch all anderen kommenden Primzahlen 11, 13, 17 etc. Natürlich setzen sich die Zahlenfolgen bis ins Unendliche fort. Sich wiederholende Werte wie  $2/1 = 4/2 = 8/4$  werden unverändert angegeben. - Für's erste wollen wir's bei den abgebildeten Tabellen bewenden lassen, denn man erkennt auch hier weitere einheitliche Zahlenfolgen bei Betrachtung der Diagonalen, die sich in gleicher Weise fortsetzen.

Diagonalen:

Linke Tabelle: von rechts oben nach links unten die Folgen  $2/1 - 9/1, 3/2 - 9/2$  etc., von links unten nach rechts oben beispielsweise die Folgen  $9/1, 8/2, 7/3, 6/4$  – die gleichen Folgen, wie sie in der rechten Tabelle waagrecht von links nach rechts auftreten.

Rechte Tabelle: von rechts oben nach links unten ebenfalls die Naturtonreihen  $1/1 - 9/1, 2/2 - 9/2$  etc., von links oben nach rechts unten die Folgen (z.B.)  $5/1, 5/2, 5/3, 5/4$  usw., ganz in der Folge wie sie in der rechten Tabelle waagrecht von links nach rechts auftauchen.

Zwischen den Schwingungsverhältnissen der geteilten Saite zur ganzen, ungeteilten Saite und den Schwingungsverhältnissen der Saitenteile zueinander besteht also ein unmittelbarer Zusammenhang. Verfolgt man in der Darstellung die Zahlenfolgen in die verschiedenen Richtungen (nach oben, unten, diagonal), dann drängt sich die Ähnlichkeit zum Lambdoma geradezu auf.

Es gibt in der Musik keine Zufälle, sie ist von der Natur gegeben.

Auf das Lambdoma werden wir noch zu sprechen kommen und seine unmittelbaren Ableitungen für musikalische Töne und Klänge – vorher folgen aber noch die mathematische Darstellung der harmonischen Teilung und die Naturtonreihe, mit der selbst mathematische Probleme wie die harmonische Intervall-Teilung ganz einfach zu lösen sind. Bis zur nächsten Folge bitte noch etwas Geduld – und herzliche Grüße!

Johannes