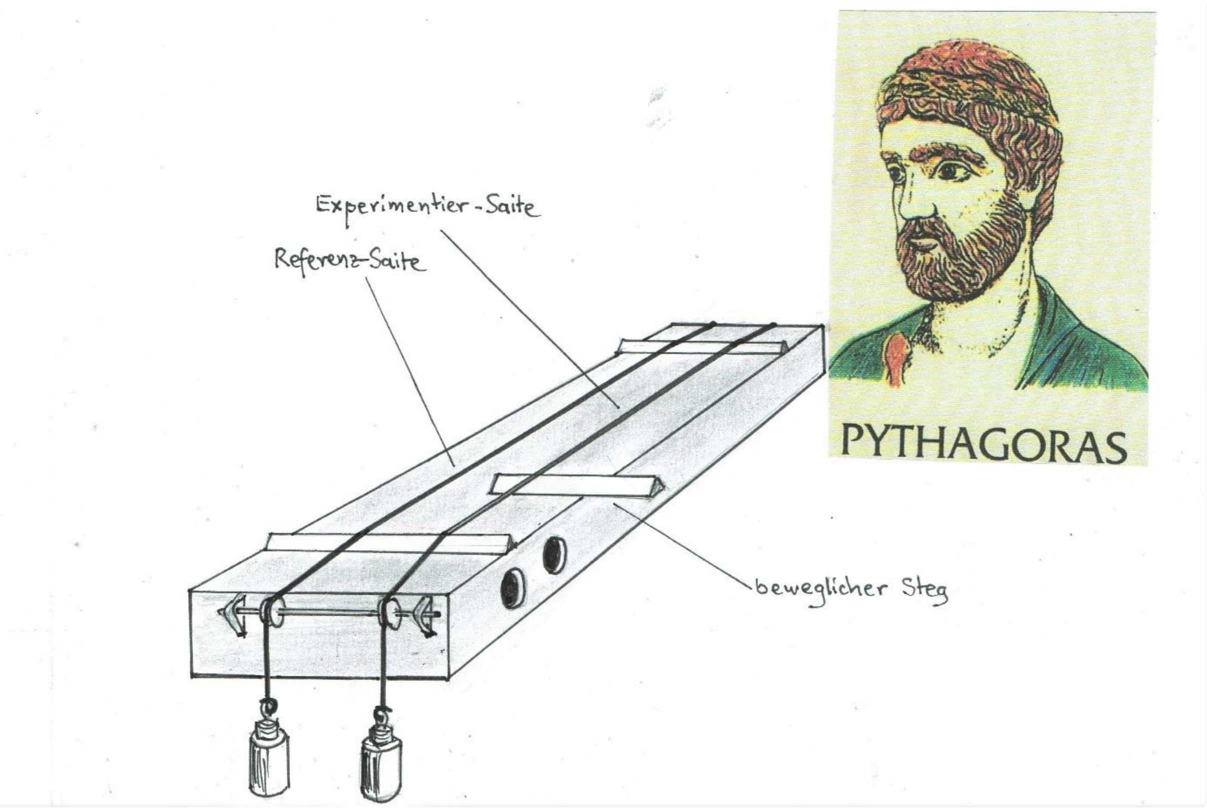
SAITENTEILUNG UND INTERVALLE I

Die Musik war von Anbeginn an eine Begleiterin des Menschen in seiner zivilisatorischen und kulturellen Entwicklung. So gehören auch die Saiteninstrumente Lyra und Harfe zu den ältesten Instrumenten. Diese bestanden aus zunächst 5, dann später aus 7-11 Saiten unter-schiedlicher Spannung und Länge, die auf einen passenden Rahmen mit Resonanzkörper gespannt waren. (Lyra von Ur, ca. 3000 v.Chr., altägyptische Bogenharfen). Die ägyptische Kultur entwickelte daraus Harfen in unterschiedlichen Größen und Formen, darunter auch kleine handliche Harfen, die Vorformen (Phorminx) der griechischen *Kythara*, dem ständigen Begleit-instrument griechischer Ependichter und Sänger im ersten Jahrtausend v.Chr.. Die Kythara (aus der sich dann Laute (arab. al Oud) und Gitarre entwickelt haben) wurde an einer Schlaufe getragen, die es erlaubte, das Instrument zu tragen und die Saiten zu zupfen, während die andere Hand frei blieb, um mit Hilfe eines Stabes die Saiten zu verkürzen und so verschiedenste Tonstufen auf dem Instrument hervorzurufen, selbst mehrstimmige Klänge waren möglich.

Schon zu Zeiten des Pythagoras (570-490 v.Chr.) waren in der hellenischen Welt – das antike Griechenland und seine Provinzen in Kleinasien und Süditalien - verschiedene Tonsysteme in Gebrauch, die ihren Ursprung im Zweistromland, in Persien und Ägypten gehabt hatten, aber Pythagoras und seine Schüler waren die ersten, die wissenschaftlich an das Phänomen der Tonhöhen und ihrer harmonisch-mathematischen Zusammenhänge herangingen und so die Grundlagen eines universellen Tonsystems schufen, das bis heute in weiten Teilen der Welt noch immer Gültigkeit hat.

Die Versuchsanordnung der pythagoräischen Schule war folgende:



Auf einem Resonator (Holzkasten) werden über einen Steg am oberen und einem am unteren Ende 2 auf den gleichen Ton gestimmte Saiten angebracht. Manche Darstellungen zeigen an den Saiten angehängte Gewichte, mit der die

Saitenspannung so reguliert werden konnte, dass die Töne gleich klangen. Eine solche „Aufhängung“ der Saite hat den Vorteil, dass der zur Teilung der Saite benutzte bewegliche Steg keine Erhöhung der Saitenspannung verursacht, die die Tonhöhe nach oben verändern würde, womit ein korrekter Vergleich zum Ton der ungeteilten Saite unmöglich gemacht wird.

Beim Monochord sind die Saiten hinter dem Ende des Steges an Stimmschrauben befestigt, die ein Nachstimmen ermöglichen, um die oben erwähnte Abweichung zu korrigieren.

Wir brauchen für den Anfang zwei gleich gestimmte Saiten auf dem Monochord:

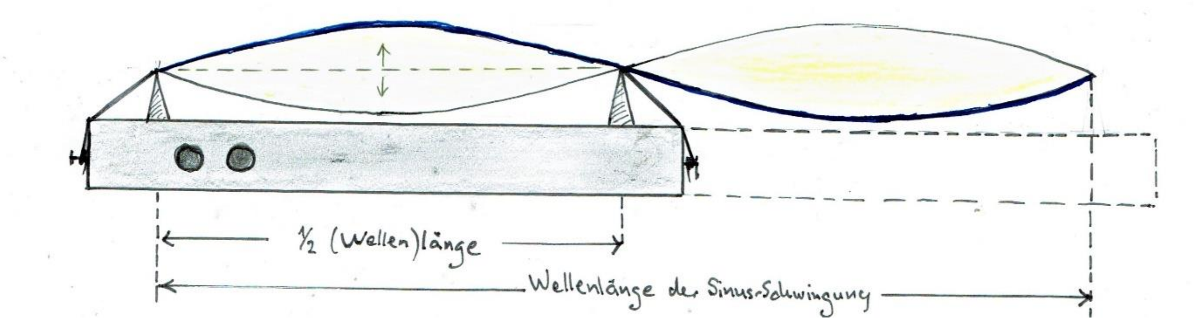
a) die Saite für die Teilungs-Experimente
b) die Referenz-Saite, die ungeteilt bleibt und den Grundton angibt.

Die Saitenlänge spielt dabei keine besondere Rolle, denn wir wollen die Intervalle ohne Stimmgerät und ohne Längenmessung bestimmen, nur nach dem Gehör. Maßband und Zollstock dienen allenfalls zur Kontrolle des Ergebnisses. In diesem Fall ist es natürlich von Vorteil, wenn die Saiten 100 cm oder noch besser 120 cm lang sind, denn hier lassen sich die Teilungen besser berechnen. (z.B. Drittel-Saite = 40 cm, Viertel-Saite = 30 cm, Fünftel-Saite = 24 cm…)

Der Grundton

Eine der beiden ungeteilten Saiten wird gezupft und in Schwingung versetzt. Die stärkste Schwingung (Auslenkung nach oben und unten = Amplitude) ist dann erreicht, wenn die Schwingungsknoten am Ende der Saiten sind und der Schwingungsbauch in der Mitte.

Dies ist das Bild einer halben Sinuskurve. Wir müssen uns vorstellen, dass das Monochord doppelt so lang ist, und der eine Schwingungsknoten am Rand zur Mitte wird:



Die Wellenlänge wäre in diesem Fall bei einer 120 cm langen Saite 2,40 m. Dies würde im Idealfall, dass deren Schwingung jener einer schwingenden Luftsäule, beispielsweise in einer Orgelpfeife, entspricht, einer Frequenz von 141,67 Hz gleichkommen. Wie kommt man auf diese Zahl? – Über die Schallgeschwindigkeit. Diese liegt bei normaler Luftfeuchtigkeit und normalem Druck und 20°C Temperatur bei 340 m/sec. In 1 Sekunde legt der Schall 340m zurück. (So kann man die Entfernung von Gewittern bestimmen: wenn der Donner 3 Sekunden nach dem Blitz zu hören ist, dann war die Entladung etwa 1km entfernt, also schon recht nahe. (3 x 340m) Dauert es eine halbe Minute bis zum Donnern, dann ist das Gewitter noch 10 km entfernt.)

Frequenz ist die Anzahl von Schwingungen pro Sekunde. Wenn die Schwingungsperiode eine Länge von 2,4 m hat, dann passt sie in den Weg, den die

Schallwelle pro Sekunde zurücklegt, 141,6666… mal hinein. (340 : 2,4 = 141,66667). Musikalisch wäre dies ein etwas zu hohes Cis im Bass.

Wir können für eine einfachere Berechnung der Schwingungsverhältnisse dieses zu hohe Cis zum C herunterstimmen:

Grundton C: f_0 = 130 Hz (Kammerton A ≈ 440 Hz)

Saiten-Halbierung: die Oktave

Eine der beiden Saiten wird mit einem beweglichen Steg geteilt. Wir können optisch eine Mitte wählen und dort den Steg aufstellen. Im Idealfall wären beide Saitenteile gleich lang und müssten den gleichen Ton erzeugen. Das gelingt meist nicht auf Anhieb – mit Sicherheit würde der eine Ton tiefer sein und der andere entsprechend höher. Man kann den Steg nach Belieben verschieben und wird folgende Feststellung machen:

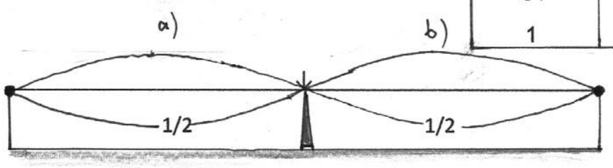
Je kürzer der Saitenteil, desto höher der Ton, und

Je länger der Saitenteil, desto tiefer der Ton.

Das entspricht auch dem akustischen Gesetz, dass *Wellenlänge und Frequenz zueinander umgekehrt proportional* sind.

Also wird man den Steg so bewegen, dass der kürzere Saitenteil länger wird und der längere Saitenteil kürzer. Die dabei erzeugten Töne nähern sich einander an, und wenn sie absolut gleich sind, dann ist auch die Mitte der Saite erreicht. Das kann jeder Mensch, auch ohne jede musikalische Vorbildung. Wenn man nachmisst, ist dieser Teilungspunkt exakt die Mitte der Saite. Das Gehör ist exakter als das Auge.

Saitenteilung 1/2	Teillängen a u. b 1/2, 1/2	Verhältnis a:b 1:1
Teilungspunkte 1	Intervall **2/1**	Intervall 1/1



Vergleicht man diesen Ton mit dem Ton der ungeteilten Saite, dann erklingt ein Intervall, das kaum anders ist, man hört aber genau, dass es zwei Töne sind, einer hoch, der andere tief. Das ist die Oktave.

Bei einem Monochord wird man meistens feststellen, dass der untere Ton als zu tief empfunden wird. Das liegt daran, dass sich durch Einschieben eines beweglichen Stegs (bei der Teilung) die Saiten-spannung geringfügig erhöht, wodurch die ungeteilte Saite tatsächlich etwas zu tief klingt. Die Oktave hört man aber ebenso genau wie gleiche Töne, und so sollte man die ungeteilte Saite durch leichtes Erhöhen der Saitenspannung (an der Stimmschraube) auf die exakte und gut hörbare Oktave einstellen. Weitere Nachjustierungen sind bei den folgenden Saitenteilungen dann nicht mehr nötig.

Die beiden Saitenteile sind nun gleich lang, ihre Längen entsprechen der Hälfte der ungeteilten Saite:

½ + ½ = 1;

Die Frequenzen ihrer Tonhöhen sind entsprechend dem akustischen Gesetz (s.o.) nun doppelt so hoch:

Oktavfrequenz $f_2 = 2/1 \times f_0 = 2 f_0$ (2/1 reziprok 1/2, f_0 = Grundfrequenz)

Frequenzen der geteilten Saite:
260 Hz u. 260 Hz

Frequenz der ungeteilten Saite:
130 Hz

Frequenzverhältnis: Oktave **2/1, 2/1**

Teilung in Drittel: die Quinte

Bei der Drittelteilung hat die Saite 2 Teilungspunkte, wir haben jedoch nur einen Steg zum Einsetzen – wir können einen der Teilungspunkte auswählen; das Ergebnis bleibt dasselbe:

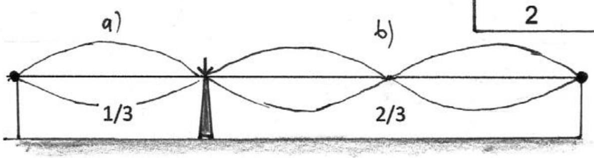
Der eine Saitenteil hat 1/3 der Länge der ganzen Saite,

der andere Saitenteil 2/3 der Saitenlänge.

1/3 + 2/3 = 1

Diese beiden Längen haben zueinander ein Verhältnis von 2:1, bzw. 1:2. Wir müssen den Steg nur so bewegen, dass der Tonhöhenunterschied der auf den Saitenteilen erzeugten Töne genau einer Oktave entspricht, und dieses Intervall lässt sich sehr gut und eindeutig erkennen. Ist die Oktave eingestellt, dann ergibt sich beim Nachmessen, dass die Saiten-längen exakt 1/3, bzw. 2/3 der ungeteilten Saitenlänge einnehmen.

Saitenteilung	Teillängen a u. b	Verhältnis a:b
1/3	1/3, 2/3	1:2
Teilungspunkte	Intervalle	Intervall
2	3/1, **3/2**	2/1



Vergleicht man die so entstandenen Tonhöhen mit der ungeteilten Saite, dann ergibt sich beim längeren Teil (2/3) mit ihr (der ungeteilten Saite) ein Intervall von 3/2, und beim kürzeren Teil (1/3) ein Intervall von 3/1). Beides sind Quinten, aber sie sind 1 Oktav voneinander entfernt. Die höhere Quint 3/1 nennt man daher Oberquint (auf der Orgel Duodezim, weil sie, auf den Tasten gezählt, der 12.Ton der Tonleiter ist), die untere Quint ist das Quint-Intervall 3/2. (auf der Orgel der 5.Ton der Tasten-Tonleiter – die Quinte).

Hier gibt es die meisten Missverständnisse: In einer gebräuchlichen Dur- oder Moll-Tonleiter ist die Quinte der 5 Ton (V. Stufe) der Skala, in der Naturtonreihe, bzw. bei der harmonischen Teilung wie bei der Saitenteilung kommt die Quinte als 3.Ton nach Grundton 1/1 und Oktave 2/1. Das Intervall 3/1 ist also die Quinte, ihr folgt logischerweise wieder eine Oktave 4/1, die Oktave – Verdoppelung! – zur Oktave 2/1. Auf diese Weise geht die Naturtonreihe weiter, davon später!

Wir halten fest:

Die Drittelteilung bringt zwei Intervalle: Die Quinte 3/2 und die Oberquinte 3/1. Ihr Abstand voneinander ist eine Oktave 2/1.

(3/1 : 3/2 = 2/1)

Die Frequenzen der beiden Quinten sind entsprechend

Oberquinte $f_3 = 3/1 \times f_0 = 3\, f_0$; ($f_0$ = 130 Hz)

Quinte (Oktave tiefer) $f_{3/2} = (3/1 : 2/1) \times f_0 = 3/2\, f_0$; (3/2 x 130 Hz = 195 Hz)

Frequenzen der geteilten Saite: 390 Hz u. 195 Hz (Oktave tiefer)

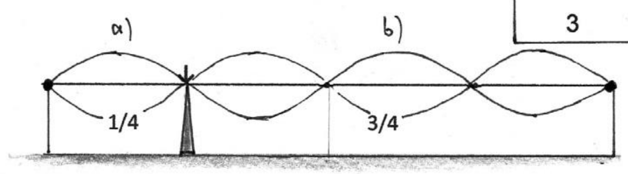
Frequenz der ungeteilten Saite: 130 Hz

Frequenzverhältnis: Oberquint, Quinte: **3/1, 3/2**

Teilung in Viertel: die Quarte

Die Viertelteilung liefert 3 Teilungspunkte:1/4, 1/2 (= 2/4) und 3/4. Der Teilungspunkt in der Mitte ist der gleiche wie bei Teilung in 2 gleiche Hälften, die zur Oktave (gegenüber der ungeteilten Referenz-Saite) geführt hat. Auch die Teilungspunkte 1/4 und 3/4 bestimmen wegen ihrer Symmetrie den einzig neuen Teilungspunkt, der die Saite in 1/4- und 3/4-Länge teilt.

Saitenteilung	Teillängen a u. b	Verhältnis a:b
1/4	1/4, (½), 3/4	1:3
Teilungspunkte	Intervalle	Intervall
3	4/1, **4/3**	3/1



Die 1/4-Länge gegenüber der Länge der ungeteilten Referenz-Saite entspricht einem Inter-vall von 4:1. Dies ist die Doppel-Oktave (4/1 : 2/1 : 1/1) oder der 4.Naturton mit der Frequenz

$$f_4 = 4/1 \times f_0 = 4\, f_0 .$$

Anders der Rest der Saite: dieser ist mit 3/4-Länge 3 mal so lang wie der erste Teilungs-abschnitt. Verglichen miteinander erklingt die Oberquinte 3/1 (Längenverhältnis: 3/4 : 1/4 = 3:1). Auch diese Quinte lässt sich mit dem Gehör noch einfach einstellen: der Teilungspunkt liegt harmonisch genau zwischen der 1. und 2. Oktave der Referenzsaite und ist in diesem Raum das am harmonischsten klingende Intervall, eben die Quinte.

Der Ton der 3/4-Saite gegenüber dem Ton der ungeteilten Referenzsaite ergibt aber ein ganz anderes Intervall, nämlich die Quarte mit dem Schwingungsverhältnis 4/3. Die Frequenz der Quart lässt sich ebenso einfach berechnen:

$$f_{4/3} = 4/3 \times f_0 = 4/3\, f_0 \quad (4/3 \times 130 \text{ Hz} = 173.333 \text{ Hz})$$

Wir vergleichen wieder die Frequenzen der beiden Saiten:

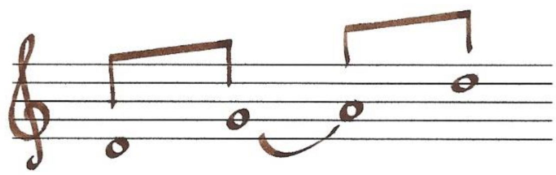
Frequenzen der geteilten Saite: 520 Hz u. 173, 333 Hz

Frequenz der ungeteilten Saite: 130 Hz

Frequenzverhältnis: Doppeloktave, Quarte: **4/1, 4/3**

An diesem Punkt müssen wir etwas einhalten, denn hier endet bereits die Teilungskunst der alten Pythagoräer. Mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 und den entsprechenden Saitenteilungen ist das System der Tetraktys komplett. Und diese Zahlen reichen tatsächlich aus, um das pythagoräische Tonsystem vollständig zu erklären. Mit der ganzen, der halben, der gedrittelten und der geviertelten Saite ist der Tonraum der Oktave bereits bestimmt – er besteht aus zwei Quarten (1/1 – 4/3) und (3/2 – 2/1). Diese Intervalle werden mit je 2 weiteren Tonstufen aufgefüllt, so dass jede Quarte aus 4 Tonstufen besteht, weshalb sie „Tetrachord“ genannt werden.

Griechische Skala

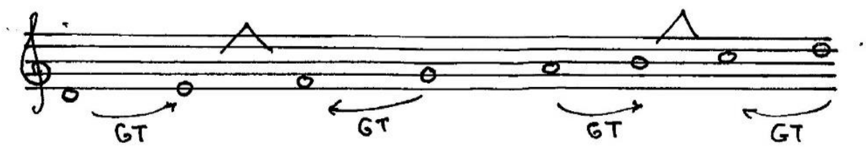


Tetrachord (Quarte 4/3) Ganzton (9/8) Tetrachord (Quarte 4/3)

Der Ganzton zwischen den beiden Tetrachorden ist exakt der Tonhöhenunterschied zwischen Quinte und Quarte, man muss also nur deren Intervallproportionen zueinander ins Verhältnis setzen, die größere Proportion gegenüber der Kleineren:

Quinte : Quarte = 3/2 : 4/3 = 3/2 x 3/4 = 9/8

Der Ganzton hat also das Schwingungsverhältnis 9:8 gegenüber dem tieferen Grundton des Intervalls, das man „große Sekunde“ nennt. Wir können diesen Ganzton (große Sekund) an den Grundton anschließen und ebenfalls an die Quinte, die ersten Töne der beiden Tetrachorde. Und wir können sie ebenfalls an die letzten Töne der beiden Tetrachorde anschließen, und zwar in Gegenrichtung:



Intervall 1/1 9/8 32/27 4/3 3/2 27/16 16/9 2

Tonstufe: 9/8 HT 9/8 9/8 9/8 HT 9/8

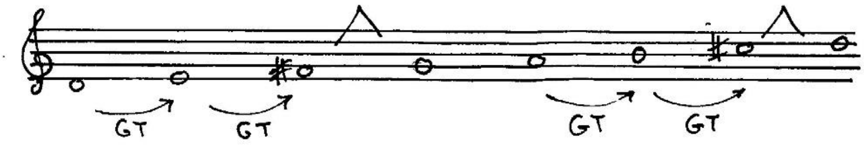
<----------------Tetrachord 1--------------->

<--------Tetrachord 2------------>

Man erhält damit die klassisch-griechische Dorische Tonleiter.

Die Halbtonstufen HT („kleine Sekunde“) haben die alten Pythagoräer rechnerisch bestimmt: 32/27 : 9/8 = 256/243 (ebenso: 16/9 : 27/16 = 256/243). Multipliziert man alle diese Zahlen der Tonstufen miteinander, ist das Ergebnis tatsächlich =2, (2/1), also die Oktave.

Folgen zwei Ganztöne aufeinander, so fehlt noch ein Halbton zur Quarte. Im 2 Tetrachord wird ebenso verfahren, und man erhält die gewohnte Dur-Tonleiter, allerdings mit einer pythagoräischen Terz 81/64 (9/8 x 9/8 = 81/64) und eine große Septim von 81/64 x 3/2 = 243/128. (oder: 27/16 x 9/8 = 243/128)



Intervall 1/1 9/8 81/64 4/3 3/2 27/16 243/128 2

Tonstufe: 9/8 9/8 HT 9/8 9/8 9/8 HT

<-----------------Tetrachord 1---------------→

←----------Tetrachord 2----------→

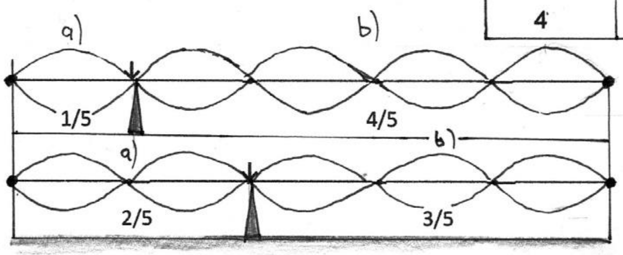
Auch hier ergibt das Produkt aus 5 Ganztönen (9/8) und 2 Halbtönen (256/243) die Oktave = 2.

Teilung in Fünftel: Die große Terz und die große Sext

Bei der Teilung der Saite in 5 Teile gibt es bereits 4 Teilungspunkte: 1/5, 2/5, 3/5 und 4/5. Zum ersten Mal gibt es jetzt zwei Möglichkeiten, Intervalle zu bilden:

a) Längen 1/5 + 4/5 = 1; → Intervalle 5/1 und 5/4
b) Längen 2/5 + 3/5 = 1; → Intervalle 5/2 und 5/3

Saitenteilung	Teillängen a u. b	Verhältnis a:b
1/5	1/5, 4/5; 2/5, 3/5	1:4, 2:3
Teilungspunkte	**Intervalle**	**Intervalle**
4	5/1, 5/2, **5/4, 5/3**	4/1, 3/2



a) - Bei der Teilung in 1/5 und 4/5 verhalten sich die Frequenzen der beiden Saitenabschnitte gegenüber der ungeteilten Referenz-Saite wie 5:1 und 5:4.

5/4 ist die Intervallproportion der reinen großen Terz (auch Naturterz genannt). Sie ist deshalb rein, weil sie dem Gehör vollkommen entspricht. Die Terzen auf temperiert gestimmten Instrumenten wie Orgel, Klavier oder Gitarre sind etwas höher und werden vom Gehirn „zurecht gehört", damit sie dem vorgegebenen Muster (Periodizitätsvergleich) der Terz gleichkommen. Streicher spielen die Terz nach dem Gehör und deshalb (meist) richtig. Spielen sie mit einem Klavier zusammen, müssen sie sich dem temperiert gestimmten Instrument anpassen und die große Terz etwas höher intonieren.

Auch 5/1 ist ein großes Terz-Intervall gegenüber der ungeteilten Seite, jedoch gleich um 2 Oktaven höher als die 5/4-Terz: 5/1 : 5/4 = 4/1. Man kann deshalb die Teilung in 4+1 Teile durchführen, wenn man den Tonhöhenunterschied zwischen den beiden Saitenteilen auf eine Doppeloktave einstellt. Dies funktioniert im Allgemeinen ganz gut – man muss nur auf Ausgeglichenheit der Saitenspannung achten, denn je kürzer die Saite ist, desto mehr nimmt sie an Spannung zu.

b) - Das ist im Fall der Teilung in 2 und 3 Einheiten (Teilungspunkte 2/5 und 3/5) wesentlich einfacher, hier gibt es kaum Spannungsunterschiede. Und das Intervall, das aus diesen beiden Saitenteilen gebildet wird, ist die bekannte Quinte 3:2. (3/5 : 2/5 = 3/2). Man muss also den Steg so verschieben, dass die Saitenteile beim Anzupfen das Quintintervall 3/2 erkennen lassen. Vergleicht man nun diese beiden Saitenteile mit der Referenz-Saite, dann hört man 2 Intervalle: beim kürzeren Teil der Saite wieder eine große Terz mit der Proportion 5/2 – sie liegt damit jeweils 1 Oktave von der 5/4- Terz und der 5/1 -Terz entfernt, genau in deren Mitte. Der andere Ton mit dem längeren Saitenteil (3/5) lässt zusammen mit dem Referenzton ein neues Intervall erklingen: 5:3 – das ist die große Sexte, jener Ton, der in der Tonleiter der Quint 3/2 folgt.

Wenn wir jetzt an die pythagoräische dorische Tonleiter zurückdenken, hat dort die große Sexte die Proportionszahl 27/16 (Quinte + Ganzton = 3/2 x 9/8 = 27/16). Da haben wir jetzt das Dilemma, dass es nun 2 Größen für die große Sext gibt: 5/3 und 27/16 – der Unterschied ist 27/16 : 5/3 = 81/80, das nennt man das „syntonische Komma“. Auch die reine 5/3-Sexte lässt sich aus Quint und Ganzton zusammensetzen, jedoch wird hier der „kleine Ganzton“ 10:9 verwendet: 3/2 x 10/9 = 5/3. Der Unterschied zwischen großem und kleinem Ganzton beträgt 9/8 : 10/9 = 81/80, wiederum das „syntonische Komma“. Die alten Pythagoräer haben das Problem ganz einfach so gelöst, dass sie die 5 nicht mehr zugelassen haben, weil sie nicht Bestandteil der Tetraktys ist.

5/3, 5/1, 5/2 und 5/4 sind also die Intervalle, die bei der Fünfteilung der Saite im Vergleich mit der ungeteilten Referenzsaite entstehen, doch als Stufen einer Tonleiter betrachtet sind es nur zwei: die große Sexte 5/3 und die große Terz 5/4. Diese taucht bei der Fünfteilung noch zweimal auf: als deren Oktave 5/2 (5/4 x 2/1 = 5/2) und als Doppeloktave 5/1 (5/4 x 2/1 x 2/1 = 5/1).

Frequenzen der geteilten Saite: 650 Hz, 325 Hz, 216,667 Hz u. 162,5 Hz

Frequenz der ungeteilten Saite: 130 Hz

Frequenzverhältnis: **5/1, 5/2, 5/3, 5/4**

große Terz-Doppeloktave, -Oktave, gr.Sexte gr.Terz