Geometrie:
gefrorene Musik

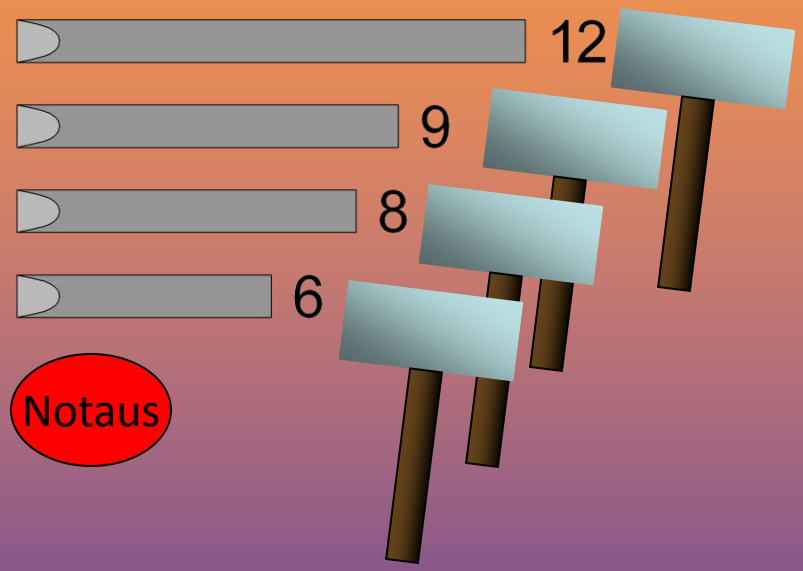
Pythagoreische Harmonik

Willibald Limbrunner, Vortrag auf dem Harmonik-Symposion Nürnberg 2011

Im engsten Zusammenhang mit der Proportionslehre seht das Monochord, beziehungsweise der Kanon, da die Bezeichnung Monochord erst durch Nikomachus eingeführt wurde. Mit seiner Hilfe dürften die Proportionen untersucht, wenn nicht überhaupt erst entdeckt worden sein; denn die weit verbreitete Legende, der zufolge Pythagoras die Proportionen beim Besuch einer Schmiede entdeckte, ist bekanntlich akustisch unmöglich verifizierbar.

Rudolf Haase, Geschichte des harmonikalen Pyhtagreismus, S12.

Boetius, römischer Gelehrter, Politiker, neuplatonischer Philosoph und Theologe. Geb. um 480/485, gest. zwischen 524 und 526 entweder in Pavia oder in Calvenzano in der heutigen Provinz Bergamo.
http://de.wikipedia.org/wiki/Boethius



„Als er in jener Zeit durch einen göttlichen Wink an Werkstätten vorbeikam, hörte er, wie Hammerschläge auf gewisse Weise aus ihren verschiedenen Klängen zu einem gemeinsamen Ton zusammenklangen.“

Quelle: De institutione musica : Von der musikalischen Unterweisung: Liber I : 1.Buch Lat.. Text netzediert nach Gottfried Friedlein, Leipzig Teubner) 1867 und ins Deutsche übersetzt von
Hans Zimmermann, Görlitz 2009

Klangquelle:
http://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras_in_der_Schmiede

XI. Auf welche Weisen von Pythagoras die verschiedenen Verhältnisse der Zusammenklänge ausgemessen wurden.

Von dort also nach Hause zurückgekehrt maß er seine Untersuchung mit verschiedenen Experimenten aus, ob das Entsprechungsgesetz der harmonischen Beziehungen mit diesen Größenverhältnissen Bestand habe.

Indem er erst einmal gleichgroße Gewichte an Saiten hängte und deren Zusammenklänge mit dem Gehör beurteilte **und dann in der Länge von Rohren doppeltes und halbes Maß herstellte und die weiteren Größenverhältnisse einhielt**, erreichte er durch verschiedene Erfahrungen hindurch absolute Zuverlässigkeit.

Oft auch, wenn er zur genauen Ausmessung Becher gleichen Gewichts in Schalen einsetzte, und wenn er oft auch ebendiese Schalen, in verschiedenen Gewichten ausgeformt, mit einem ehernen oder eisernen Stock anschlug, freute er sich, keine Abweichungen zu finden.

Davon veranlaßt machte er sich daran, Länge und Dicke von Saiten zu erforschen. **Und so erfand er ein Richtholz, über das wir weiter unten sprechen wollen, das seinen Namen von der Sache nimmt, nicht weil das Richtholz ein hölzernes ist, mit dem wir Saitenlänge und Klang messen, sondern weil dieses Richtholz ein so sicher genormtes Untersuchungsmittel ist, daß es keinen Forscher durch eine falsche Angabe täuscht.**

Quelle: Boetius, de institutione musica : Von der musikalischen Unterweisung: Liber I : 1.Buch Lat.. Text netzediert nach Gottfried Friedlein, Leipzig Teubner 1867 und ins Deutsche übersetzt von Hans Zimmermann, Görlitz 2009

„Von dem bedeutenden Pythagoreer Hippasos (5. Jahrh. v. Chr.) ist überliefert, er habe mit Bronzescheiben gleichen Umfangs und unterschiedlicher Dicke experimentiert.“

Riedweg Christoph, Pythagoras, C.H.Beck, München, 2002, S.46

Die Feldstärke nimmt mit der Entfernung umgekehrt quadratisch ab

Elektrisches Feld

$$F(r) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Abbildung

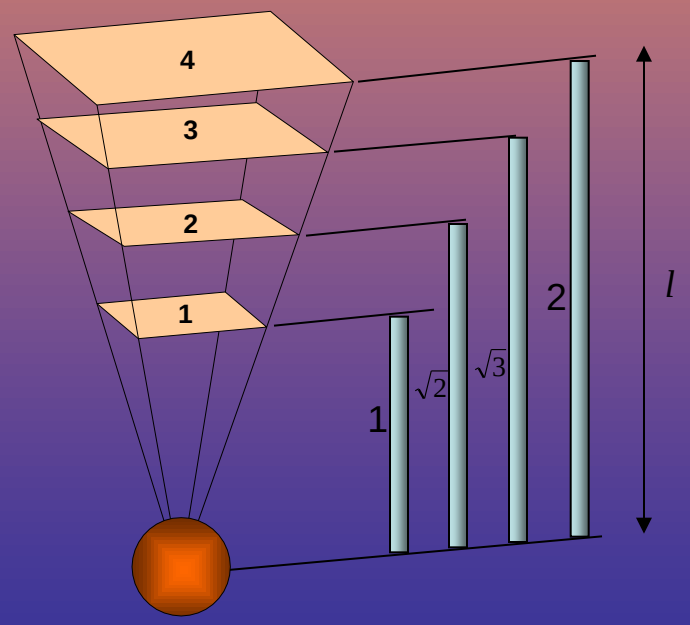
Zusammenhang zwischen

Frequenz f und Länge (bzw. Durchm.) l

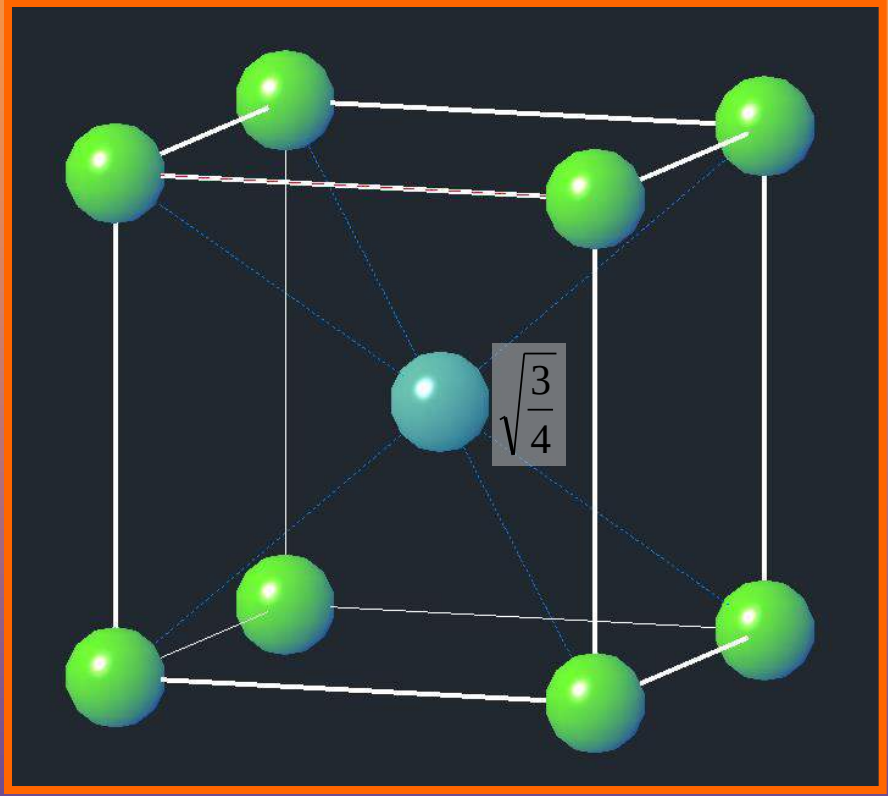
bei Klangkörpern

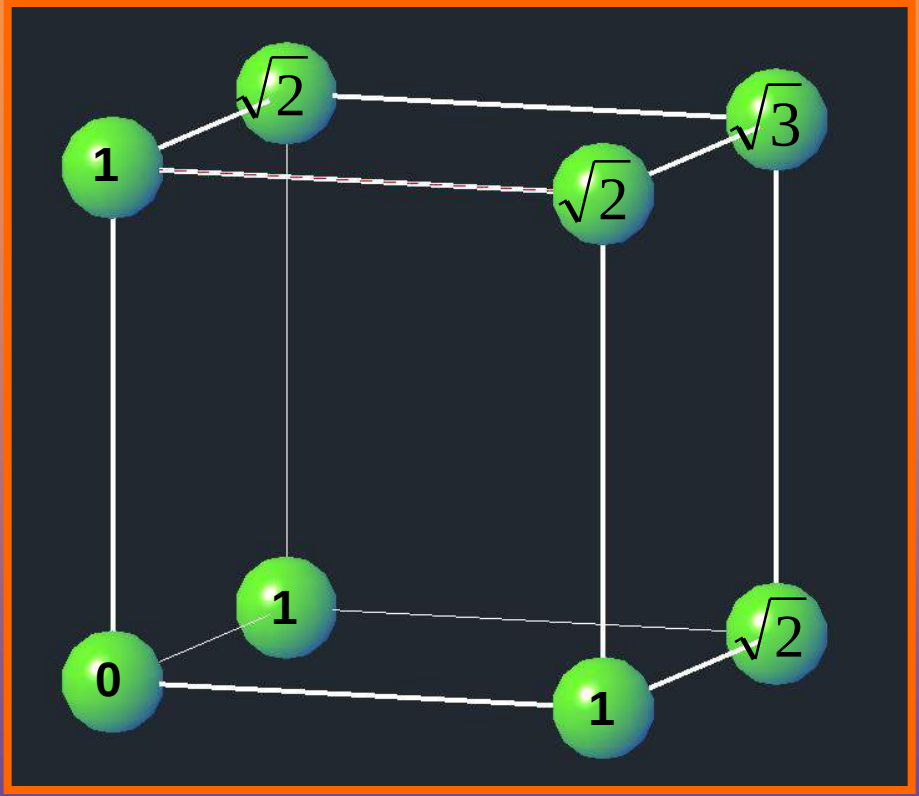
$$f \propto \frac{1}{l^2}$$

Verteilung der Feldkraft auf Flächen



Kubisch raumzentriert und kubisch flächenzentriert:
So kristallisieren etwa 60 % aller Elemente.





Abstände und somit die elektrostatischen Feldkräfte von einer beliebigen Ecke aus

$$\sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt{1} : \sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

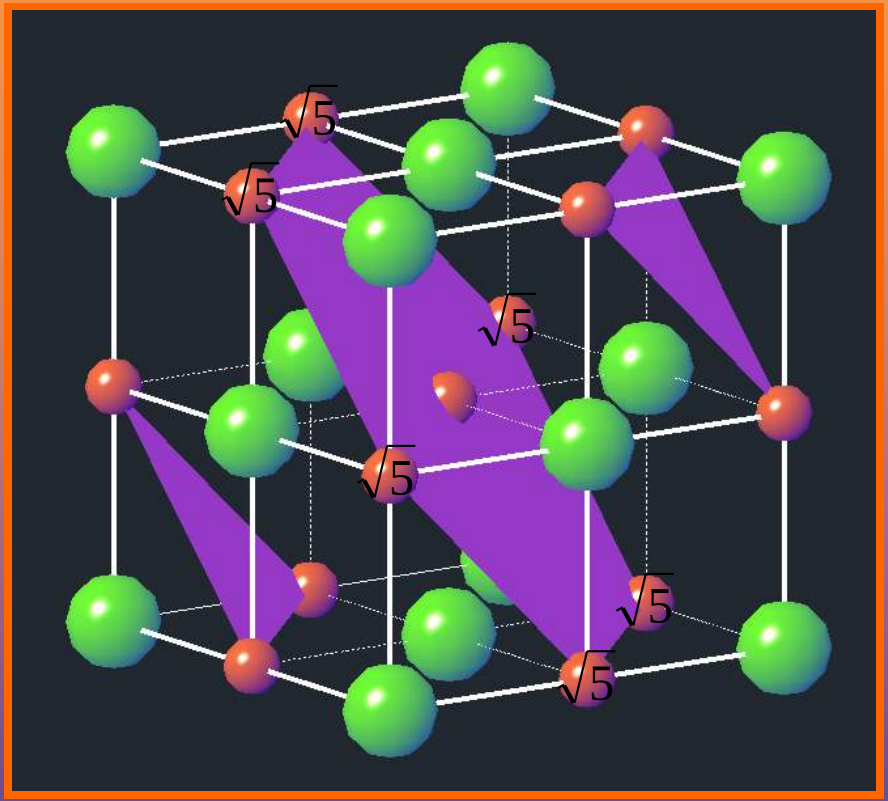
Erklingen in den Intervallen F,,-C,-C-F-G-C‘

Quarte(3:4) - Quinte(2:3) - Oktave(1:2)

Vertonung der Kristallstruktur von Kochsalz NaCl

1 2 3 4 6 8 9 12

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{6}{12}\,\frac{8}{12}\,\frac{9}{12}$$



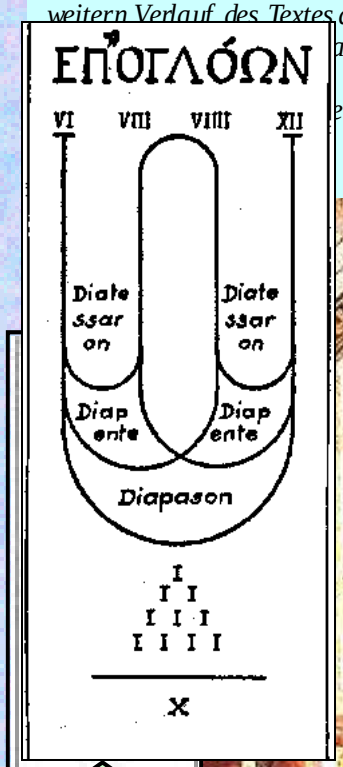
Es ist nämlich durchaus nicht klar, welche Vierheit von Zahlen, die der Begriff Tetraktys ja meint, in Frage kommt.

Rudolf Haase, Geschichte des harmonikalen Pyhtagreismus, S14.

C,, -	C, -	G, -	C -	**E** -	G -	C‘ -	D‘ -	G
1	2	3	4	**5**	6	8	9	12

Die Schule von Athen, ein Fresko von Raffael

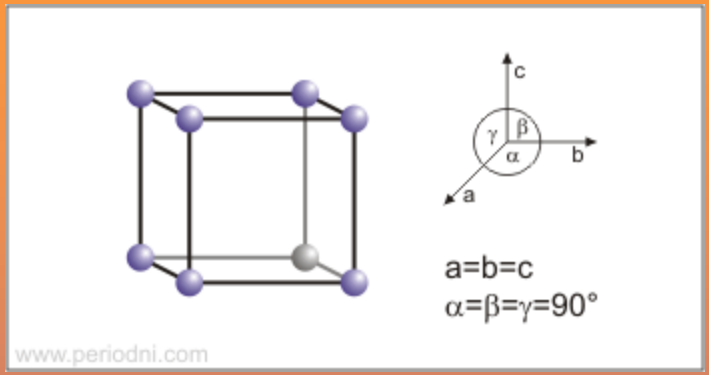
Wegen der hier aufgezeigten Verbindung, werde ich im weitern Verlauf des Textes die *a als* *einen*



„Die Schule von Athen". Das Fresko wurde 1512 vollendet und diente ursprünglich der Ausschmückung der Gemächer von Papst Julius II. Im Zentrum des Bildes befinden sich die beiden griechischen Philosophen Aristoteles und Platon, die im Mittelalter als die wichtigsten Vertreter der antiken Philosophie galten. Links im Profil ist Sokrates zu erkennen. Auf den Treppen, zu Füßen der Philosophen sitzt Diogenes, ein griechischer Naturphilosoph. Links unten ist mit einem Pfeil markiert eine schwarze Tafel zu sehen. In ihr ist die Pytagoräische Tetraktys dargestellt. Im Zentrum der Gruppe Pythagoras.

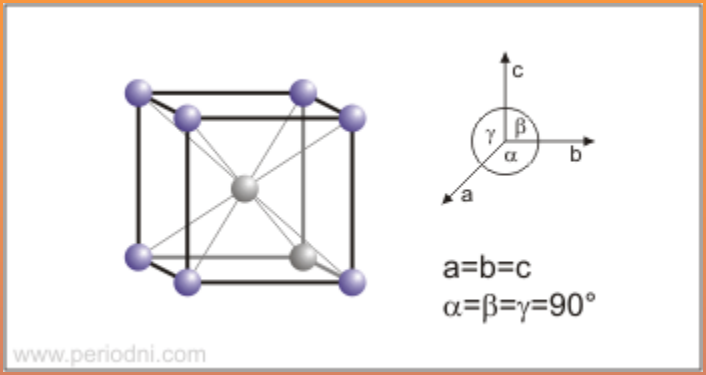
Aus Theo Reisers Geheimnis der Pythagoreischen Tetraktys, Verlag Lambert Schneider Heidelberg 1967

Kubisch



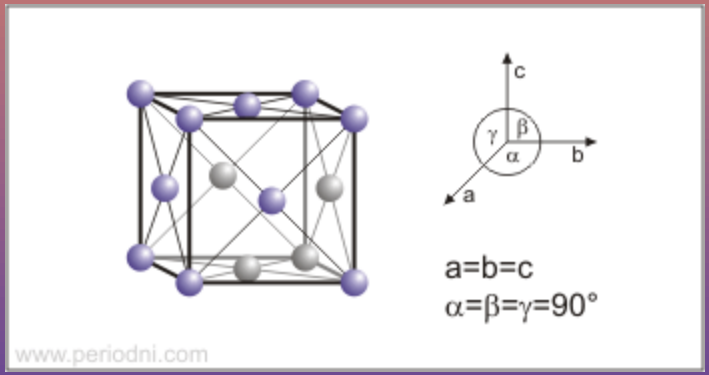
O, F, P, Po, Np
5

KRZ



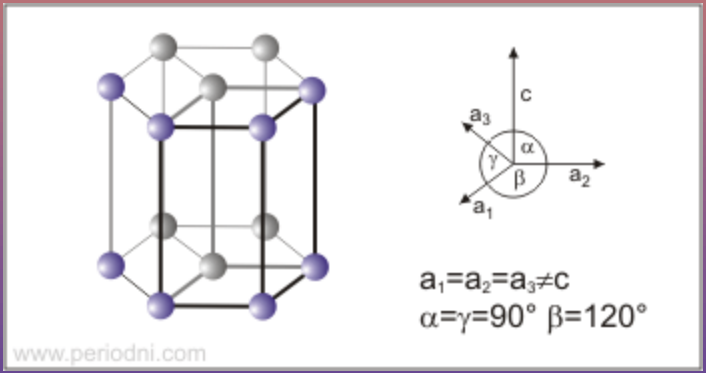
Li, Na, K, V, Cr, Mn, Fe, Rb, Nb, Mo, Cs, Ba, Ta, W,
14

KFZ

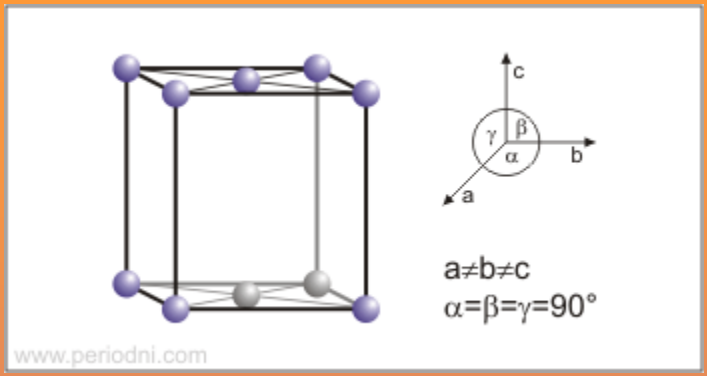


Ne, Al, Si, Ar, Ca, Co, Ni, Cu, Ge, Kr, Sr, Rh, Pd, Ag,
Xe, Ce, Eu, Yb, Ir, Pt, Au, Pb, Rn, Ra, Ac, Th,
26

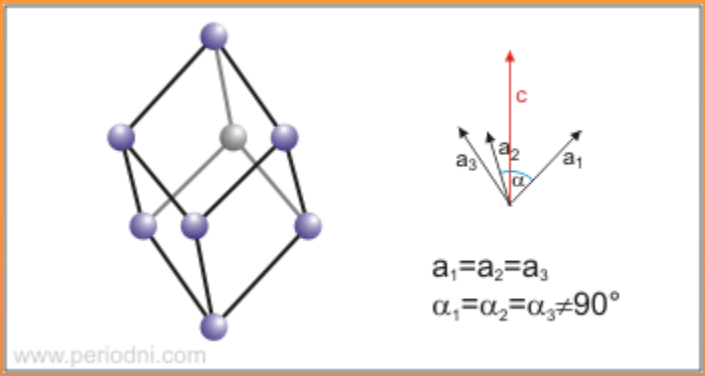
Hexagonal



H, He, Be, Mg, Sc, Ti, Zn, Se, Y, Zr, Tc, Ru, Cd, Te,
La, Pr, Nd, Pr, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, Lu, Hf, Re,
Os, Tl, Am(95), Cm(96), Bk(97), Cf(98), Es(99),
34
34+26+14+5=79

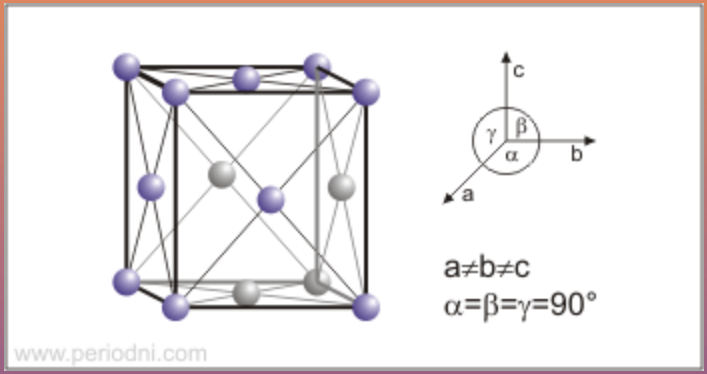


Cl, Ga, Br, J, U,
5
Rhomboedrisch

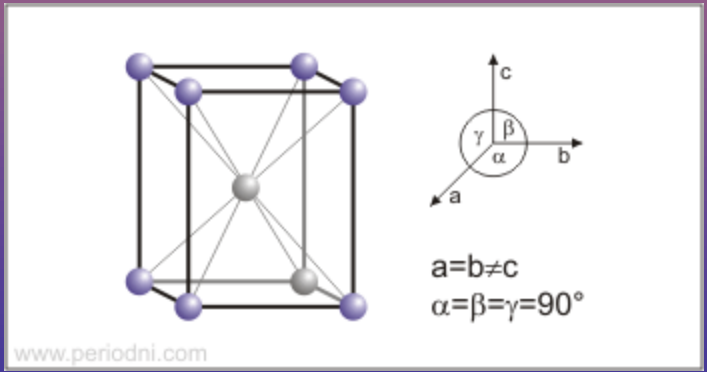


B, C, N, As, Sb, Sm, Hg, Bi,
8
Tetragonal Raumzentriert

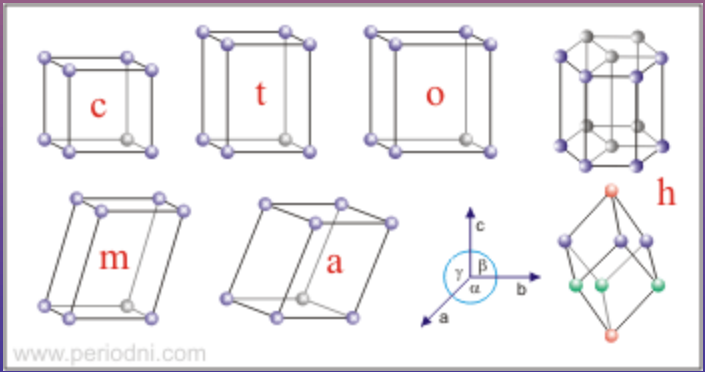
face-centered orthorhombic



base-centered orthorhombic

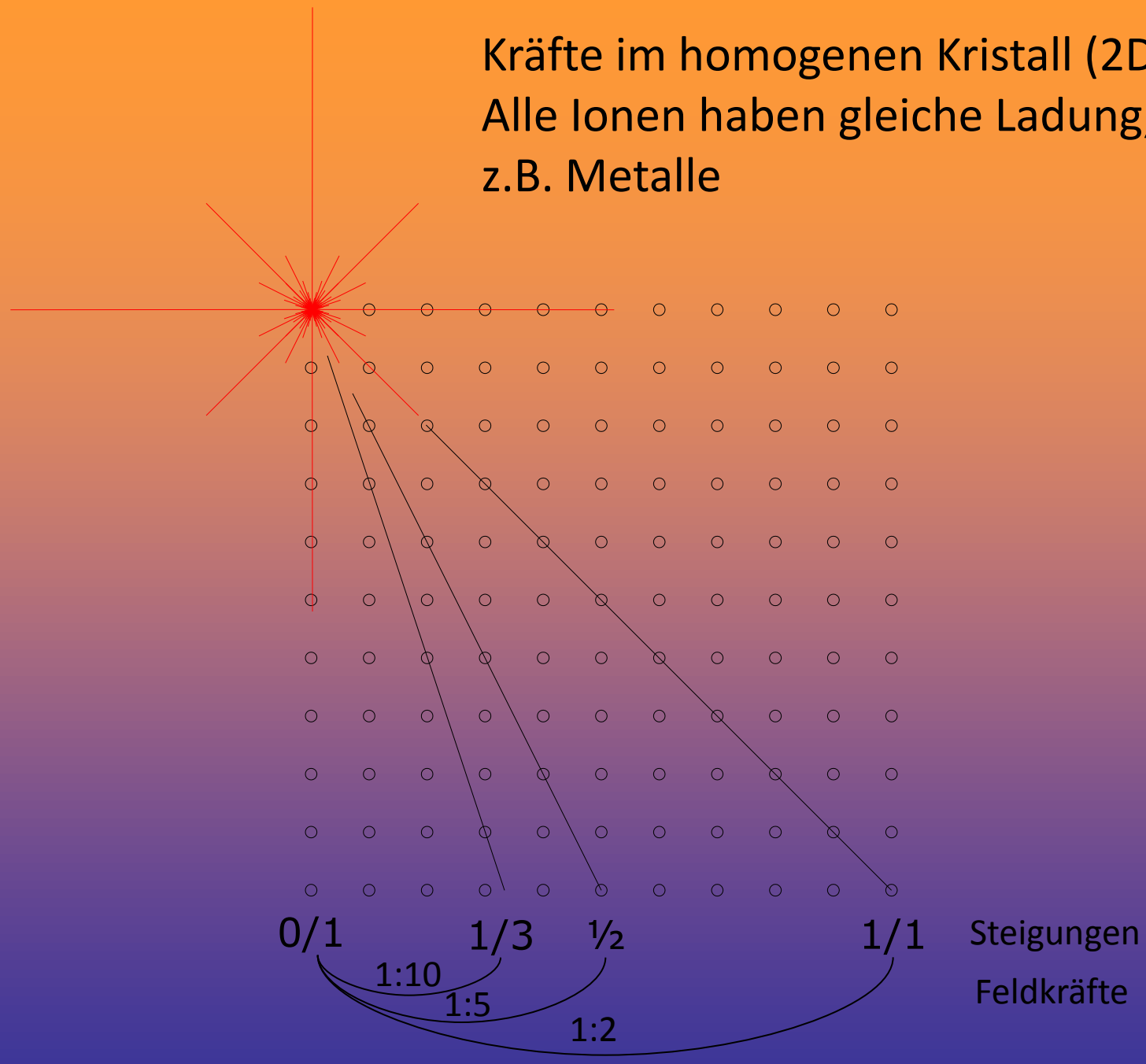


In(Indium), Sn(Zinn), Pa(Protactinium),
3



Astat, Francium, (100-112)
14

Kräfte im homogenen Kristall (2D)
Alle Ionen haben gleiche Ladung, z.B. Metalle

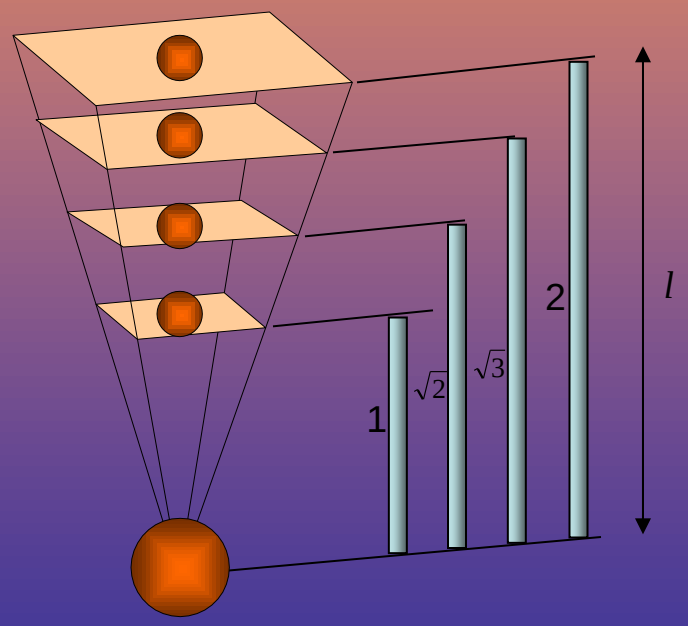


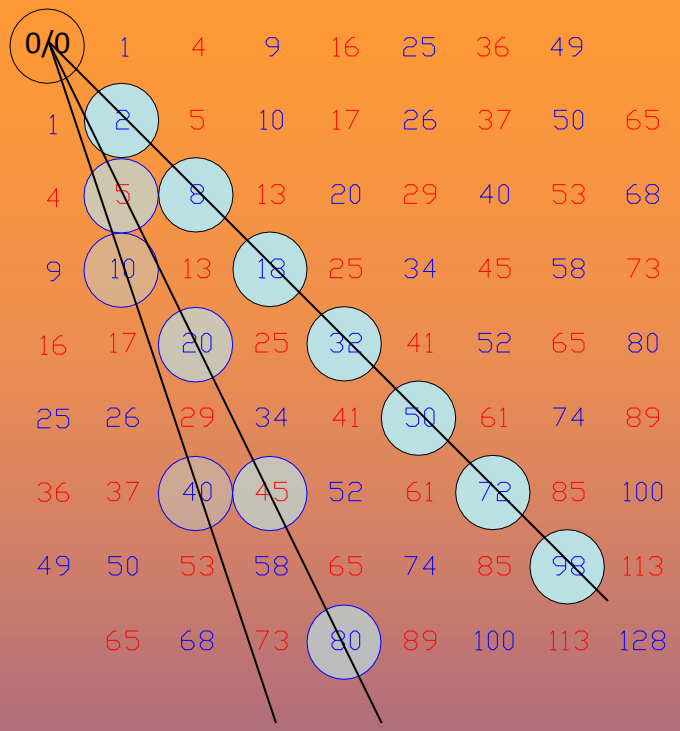
Die Madelungkonstante

ist ein einheitenloser Faktor, der als das Verhältnis der durchschnittlichen Bindungsenergie pro Ion im Kristallgitter zur durchschnittlichen Bindungsenergie pro Ion bei einem einzelnen Ionenpaar definiert ist. Er hängt dabei nur vom Strukturtyp ab und ist unabhängig von der Ionenladung und den Zellparametern.

http://de.wikipedia.org/wiki/Madelung-Konstante

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{n_k}{c_k} = \frac{6}{1} - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{2} + \frac{24}{\sqrt{5}} \pm \ldots \approx 1{,}7476$$





Diese Darstellung zeigt, wie die Feldkräfte in einem Kristallgitter mit der Entfernung vom Punkt 0/0 abfallen.

Die Kehrwerte der Zahlen zeigen die Größen der Feldkräfte an diesem Gitterpunkt, bezogen auf den Punkt 0/0.

Die Summe aller Feldkräfte entlang einer Geraden ergibt die Größe der wirkenden Feldkraft entlang dieser Geraden.

Die Kraft in Diagonalrichtung beträgt also z.B. das Wurzel (1/2)-fache der Kraft, die in der Waagrechten wirkt.

Klangröhren mit diesen Längenverhältnissen erklingen in einem Oktavintervall.

Reihensummen bis 10.000

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{0^2+n^2}=1{,}644\ldots$$

2:1

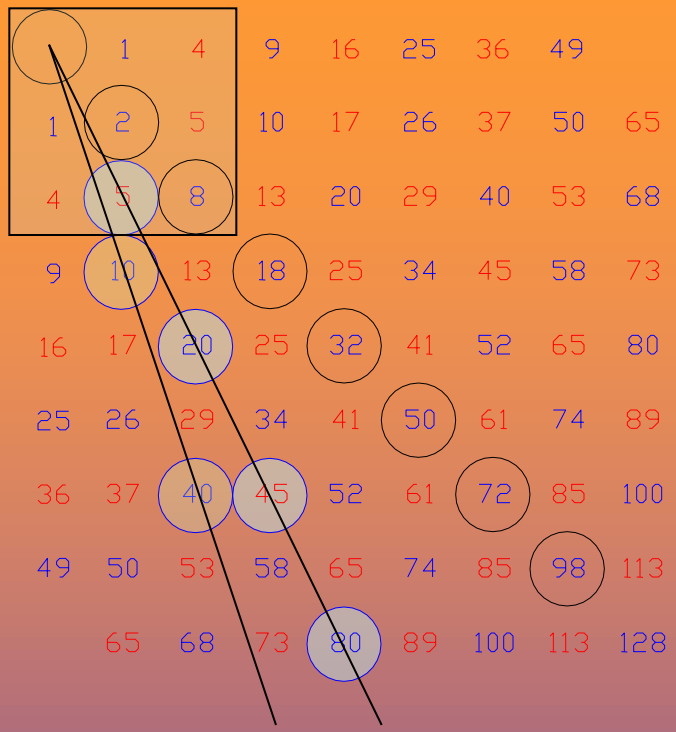
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}=0{,}822\ldots$$

2:5

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{45}+\ldots+\frac{1}{n^2+(2n)^2}=0{,}329\ldots$$

2:1

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{90}+\ldots+\frac{1}{n^2+(3n)^2}=0{,}164\ldots$$



Kräfte im homogenen Kristall (2D).
Die Ionen haben wechselnde Ladung, z.B. Kochsalz NaCl.

Reihensummen bis 10.000
mit wechselnden Vorzeichen

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{1}{0^2+n^2}=-.822467028424606\ldots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{18}-\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}=.822467028424606\ldots$$

5:1

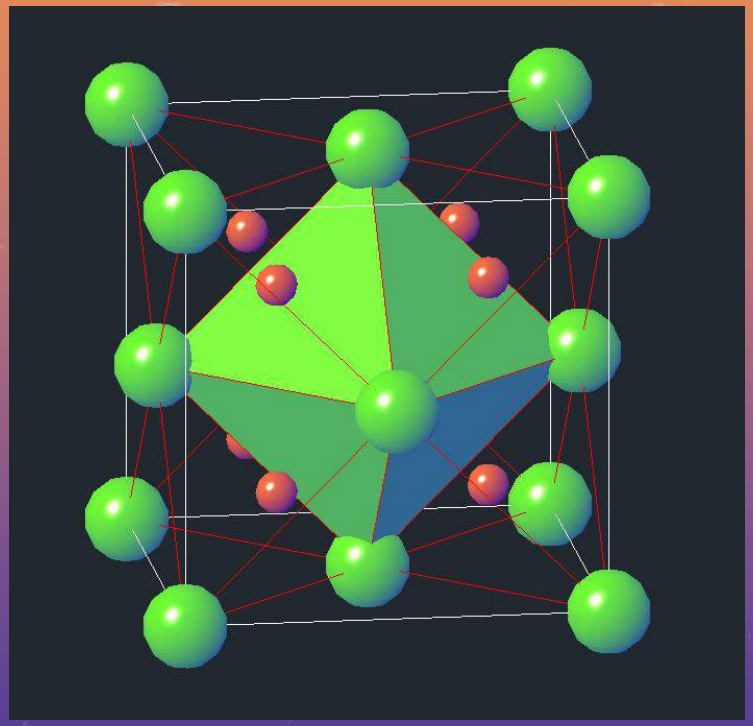
$$\frac{1}{5}-\frac{1}{20}+\frac{1}{45}-\ldots+\frac{1}{n^2+(2n)^2}=-0.164493405684923$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{90}+\ldots+\frac{1}{n^2+(3n)^2}=0.164483407184807$$

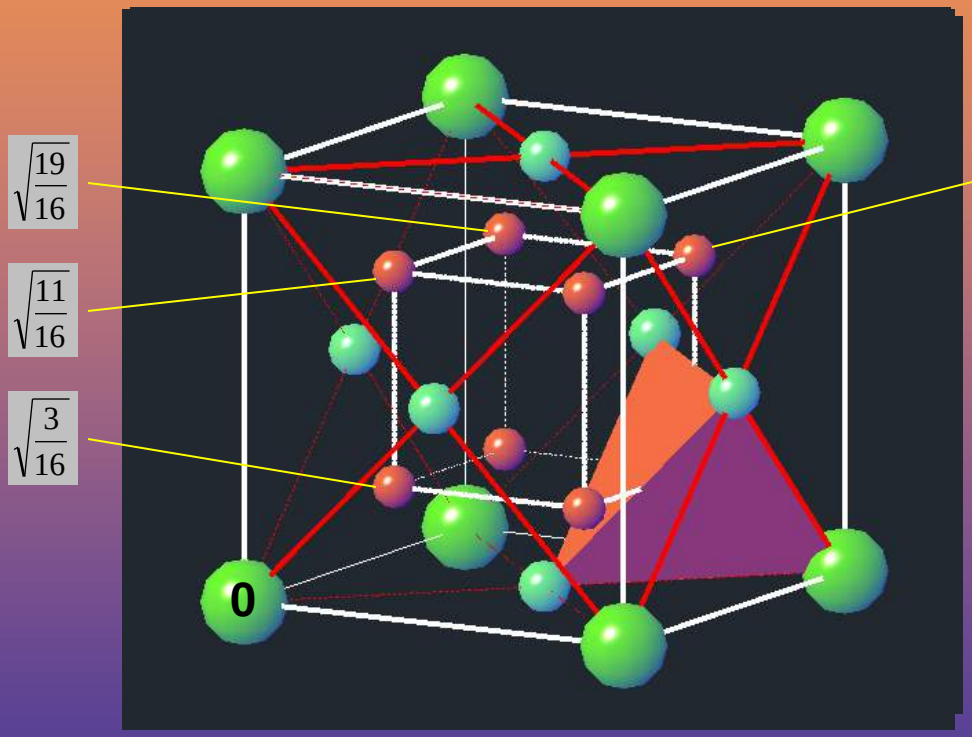
Mit *zwei* Atomen in der Basis, eines bei der Position **(0,0,0)** der Würfelecke, das andere dann bei **(1/4, 1/4, 1/4)**, kristallisiert **Si**, **Ge**, **C** (als Diamant) und **Sn** unterhalb von **13°C**. Diese Kristallsorte hat einen eigenen Namen; man spricht vom "**Diamantgitter**" (obwohl man eigentlich "Diamant*kristall*" meint).

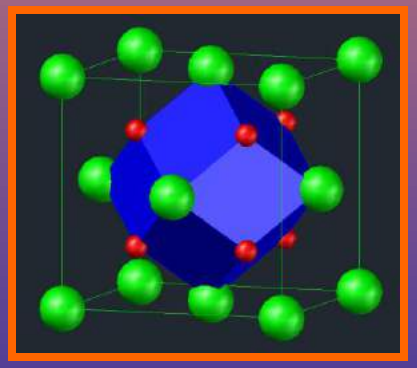
Rohdiamanten

Quelle:http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_3/illustr/i3_3_1.html



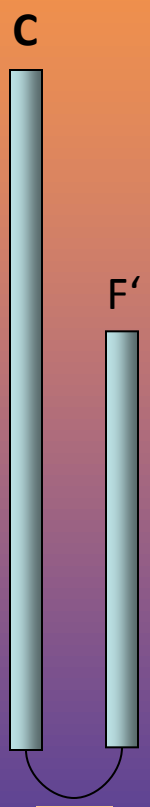
Mit *zwei* Atomen in der Basis, eines bei der Position **(0,0,0)** der Würfelecke, das andere dann bei **(1/4, 1/4, 1/4)**, kristallisiert **Si**, **Ge**, **C** (als Diamant) und **Sn** unterhalb von **13°C**. Diese Kristallsorte hat einen eigenen Namen; man spricht vom "**Diamantgitter**" (obwohl man eigentlich "Diamant*kristall*" meint).





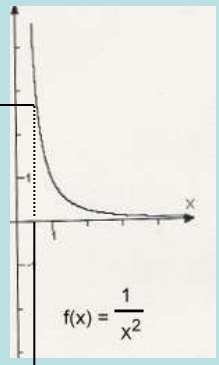
Vertonung der Molekülstruktur von Kohlenstoff, Methan etc.

Chem. Bez. C, CH_4



$\sqrt{\frac{3}{8}}$

Feld-kräfte $f(x) = \frac{8}{3}$



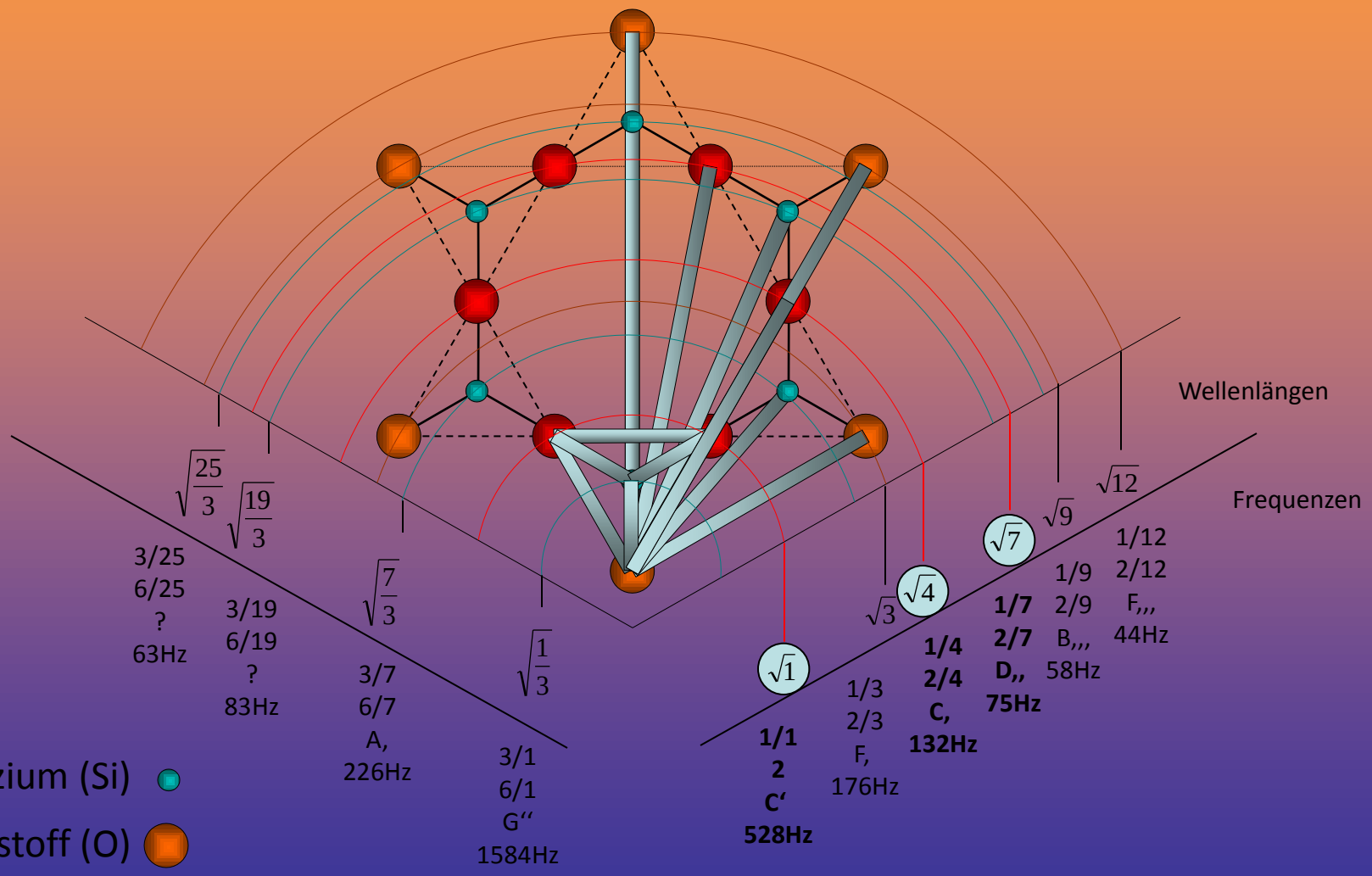
Kristallgitter-abstände $x = \sqrt{\frac{3}{8}}$

$\sqrt{\frac{3}{8}}$

1

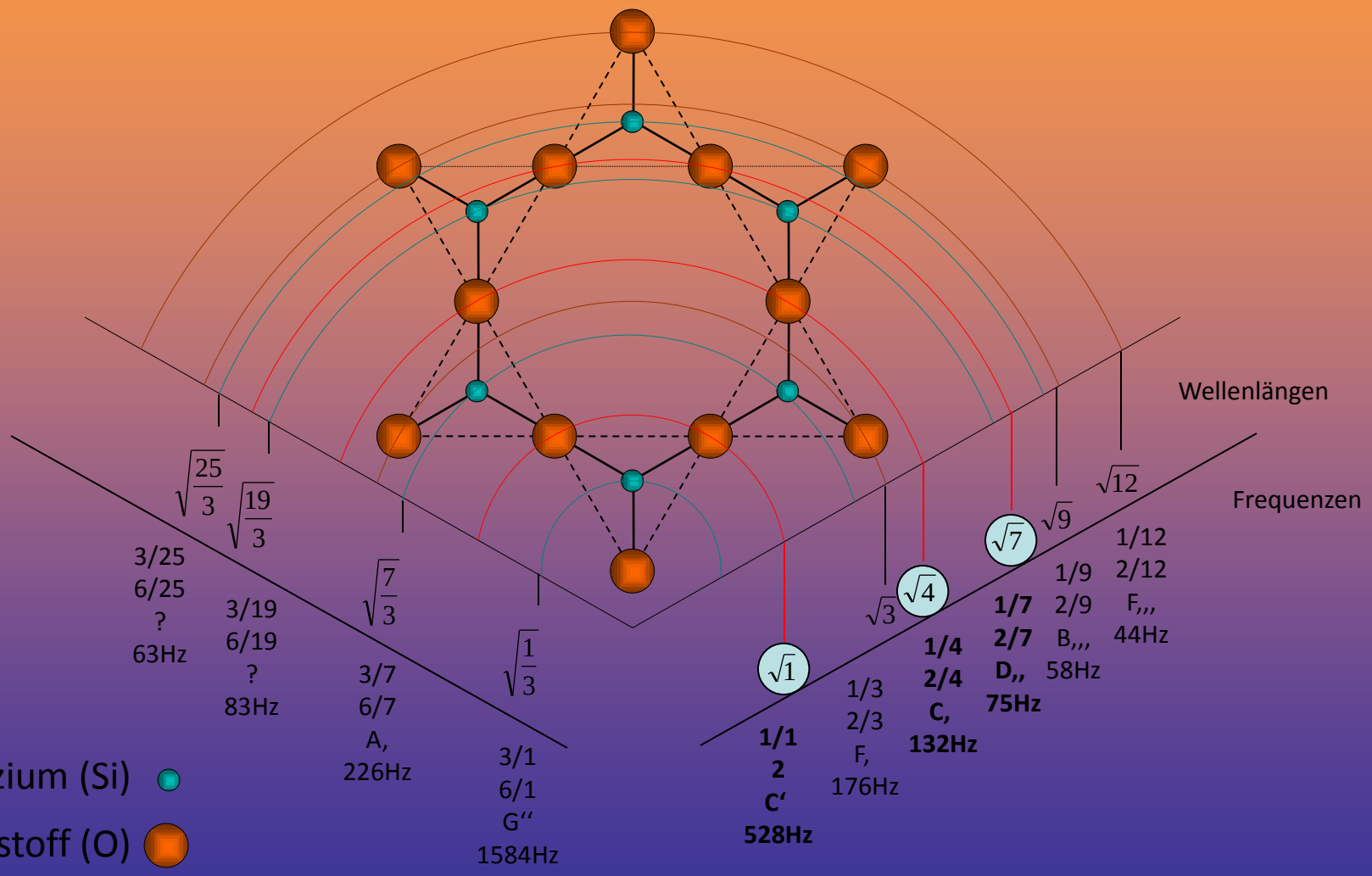
Vertonung der Molekülstruktur von Quarz

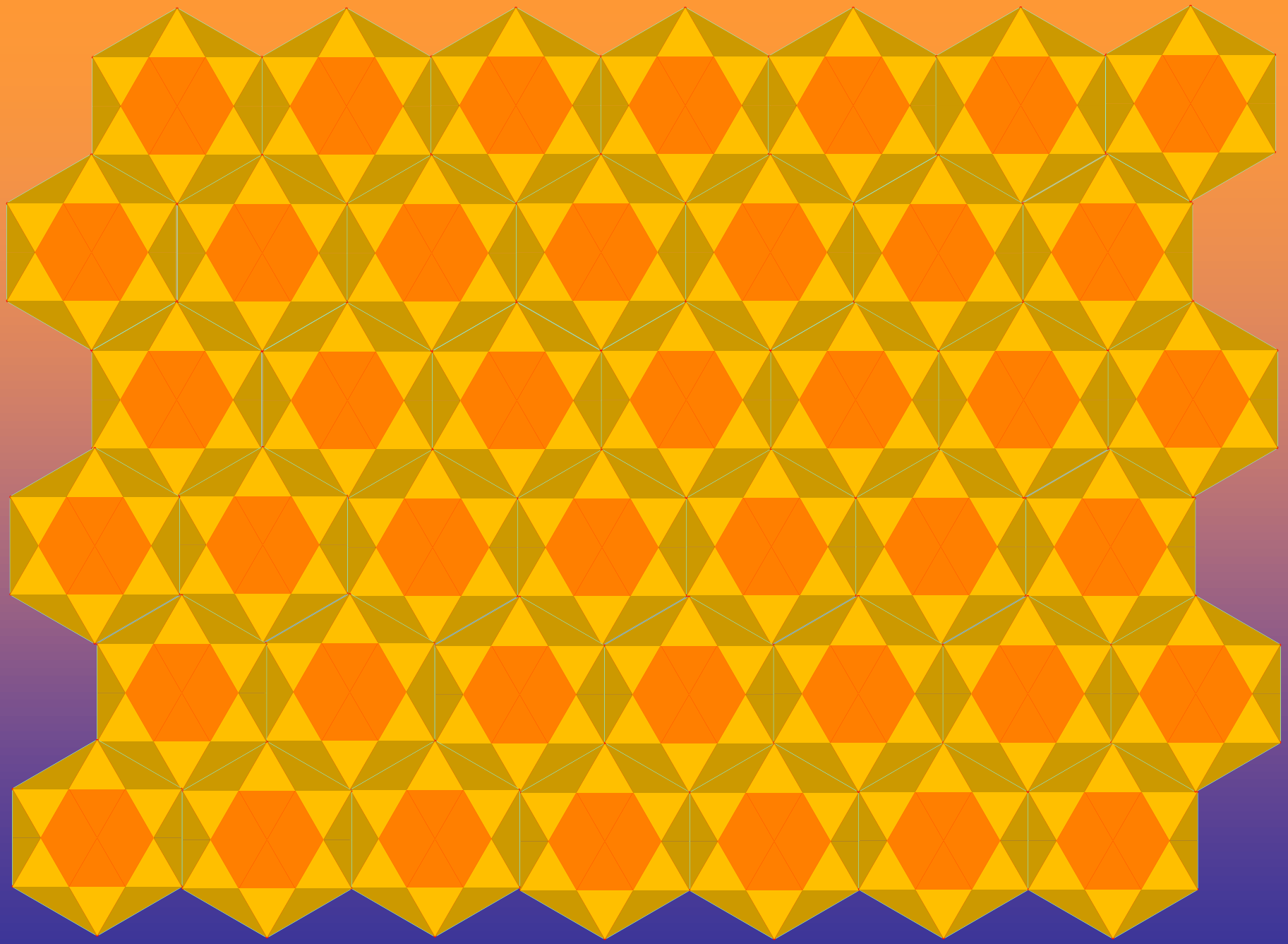
(Umgangssprachlich: Quarzsand, Bergkristall)
Chem. Bez. Siliziumdioxyd, SiO_2



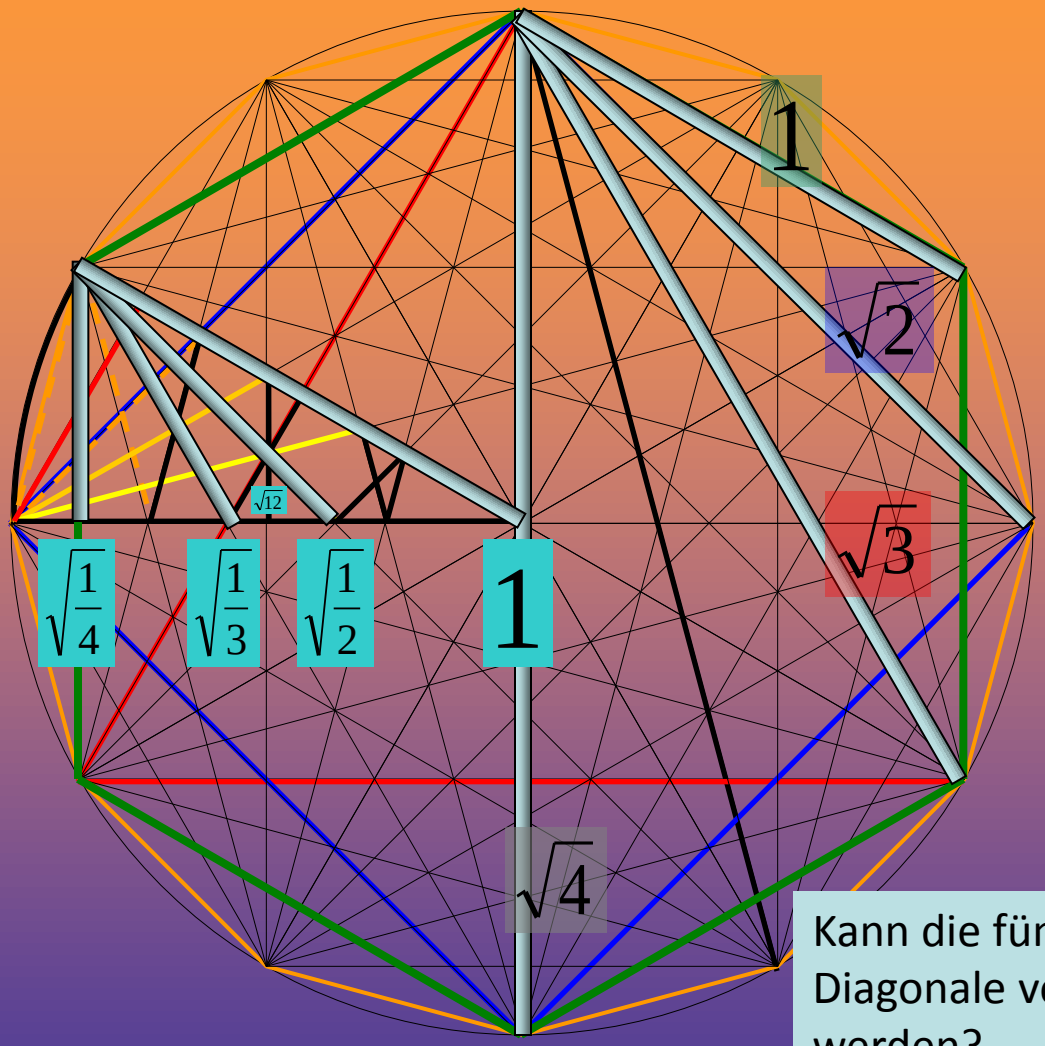
Vertonung der Molekülstruktur von Quarz

(Umgangssprachlich: Quarzsand, Bergkristall)
Chem. Bez. Siliziumdioxyd SiO_2





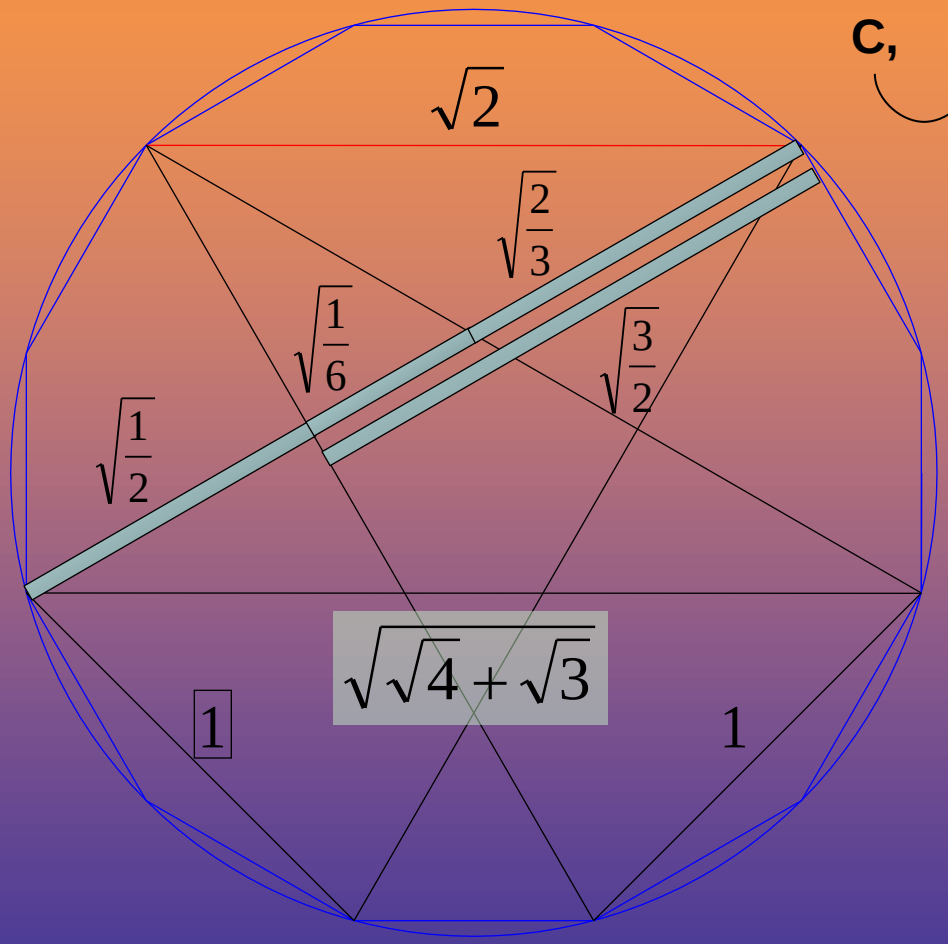
$R = 1$

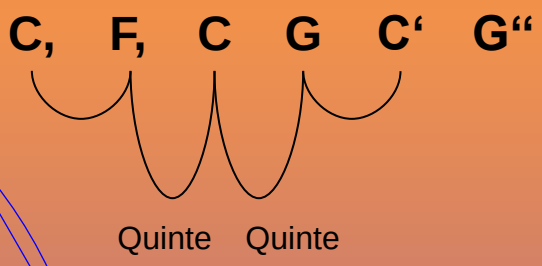


Kann die fünfte Diagonale vertont werden?

1/4 : 1/3 : 1/2 : 1 – 1 : 2 : 3 : 4
C“ - G‘ - C‘ - C : C - C, - F, - C,,

Vertonung der fünften Diagonale





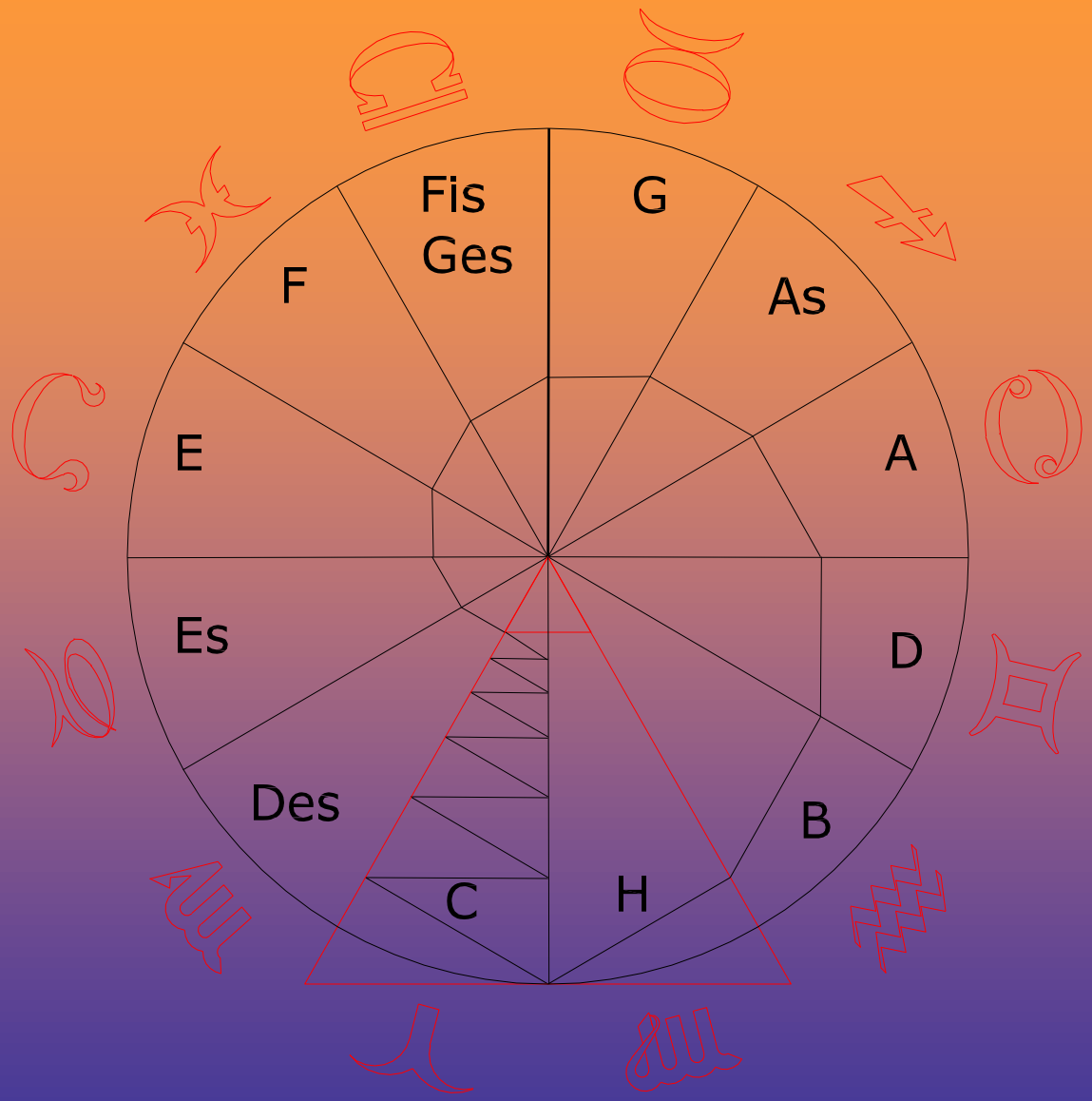
$$\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}=2+\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}$$


Fis
Ges
G
As
A
D
B
H
C
Des
Es
E
F

April
20.03.-20.04.
6-8 Uhr

März
20.02.-19.03.
4-6 Uhr

Mai
21.04.-12.05.
8-10 Uhr

Februar
21.01.-19.02.
2-4 Uhr

Juni
22.05.-21.06.
10-12 Uhr

Januar
22.12.-20.01.
0-2 Uhr

Juli
22.06-22.07.
12-14 Uhr

Dezember
23.11.-21.12.
22-0 Uhr

August
23.07.-22.08.
14-16 Uhr

November
23.10.-22.11.
20-22 Uhr

September
23.08.-22.09.
16-18 Uhr

Oktober
23.09.-22.10.
18-20 Uhr

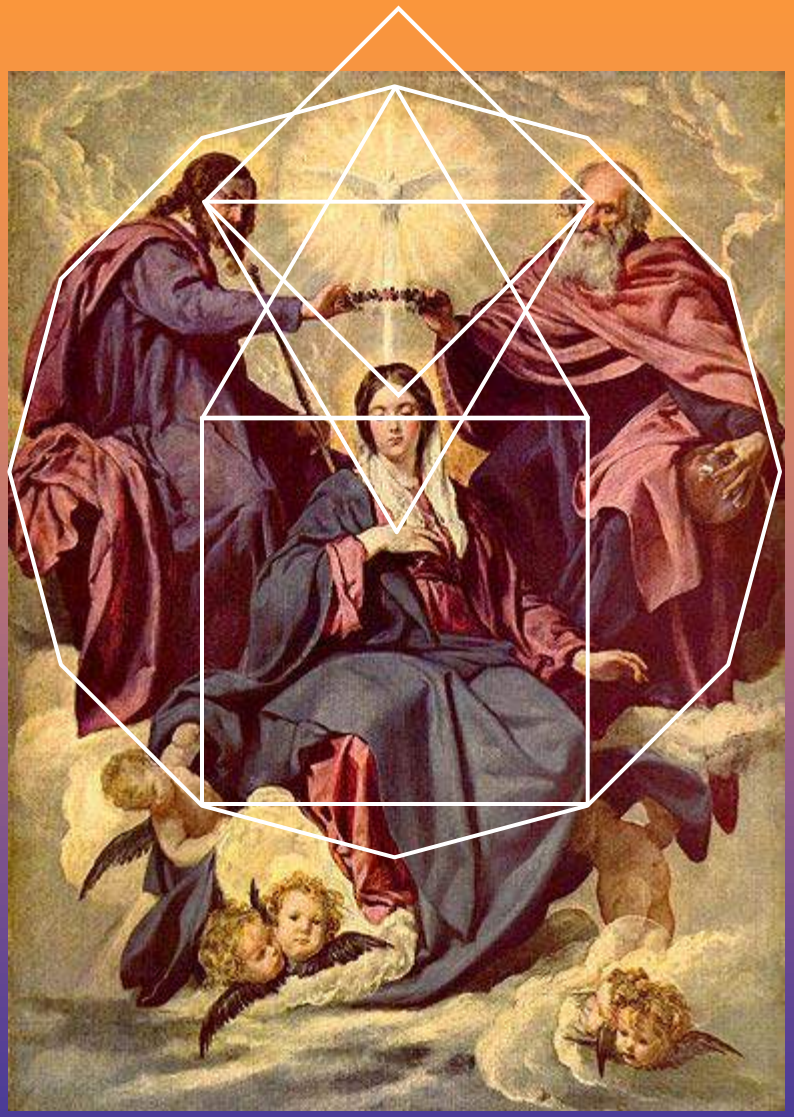
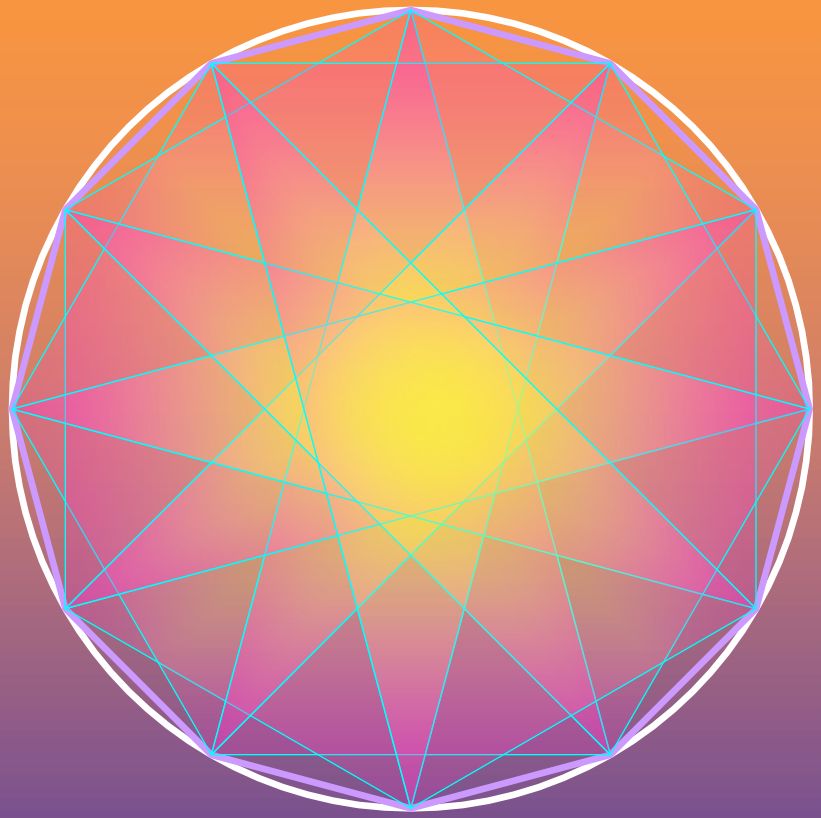
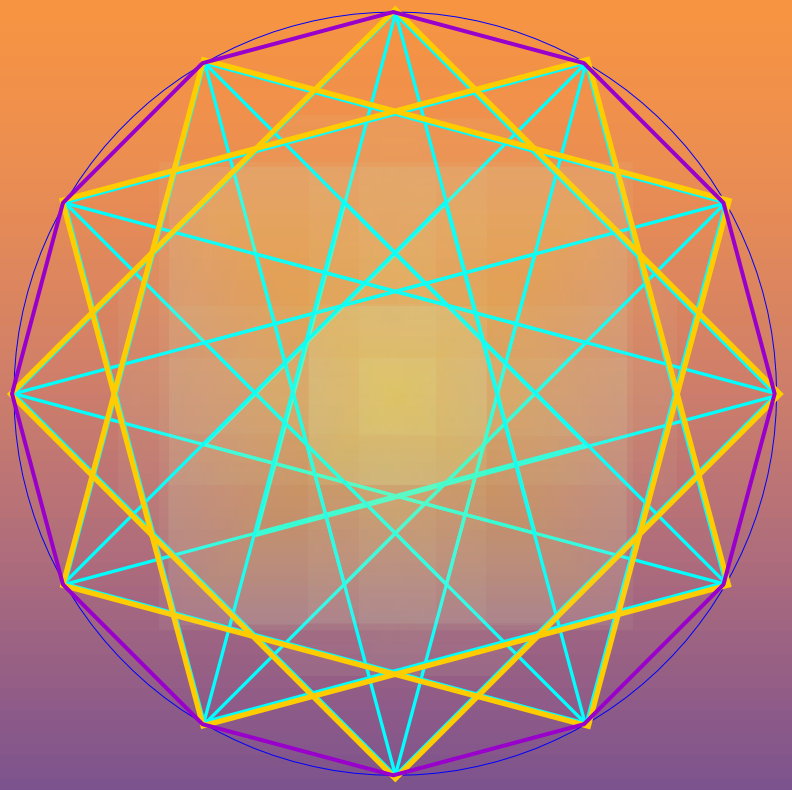
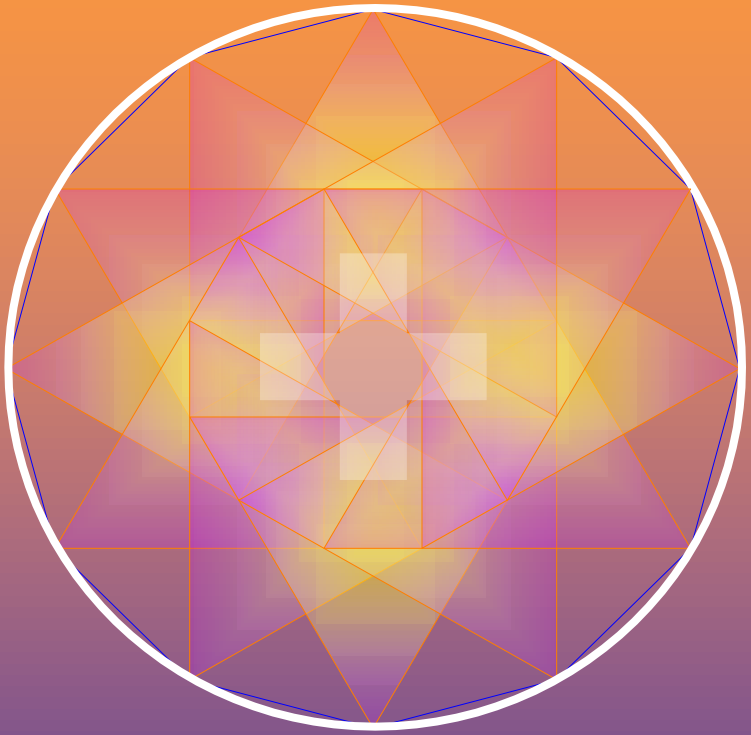
C a G e D h fis A cis E gis H Fis/Ges cis/es b Des f As c Es g B d F

CD Tonarten
und
Sternzeichen

Grafiken: Willibald Limbrunner

Stefan Mikisch
http://www.mickisch.de/
Konzertpianist

Die Verwandlung
von Dreieck und Quadrat



Velazquez, Entstanden 1640, Museo del Prado, Madrid, Öl, Leinwand, 176 X 124 cm
Quelle <http://www.meisterwerke-online.de/gemaelde/velazquez/5341/die-kroenung-marias.html>