

Harmonie im Kosmos

Erforschung des
Chaos
Vieweg Verlag

Fraktale, Chaos und
Selbstähnlichkeit
Manfred Schroeder
Spektrum Verlag

Die Titus Bode Reihe

Johann Daniel Titius (1729–1796)

Johann Elert Bode (1747–1826)

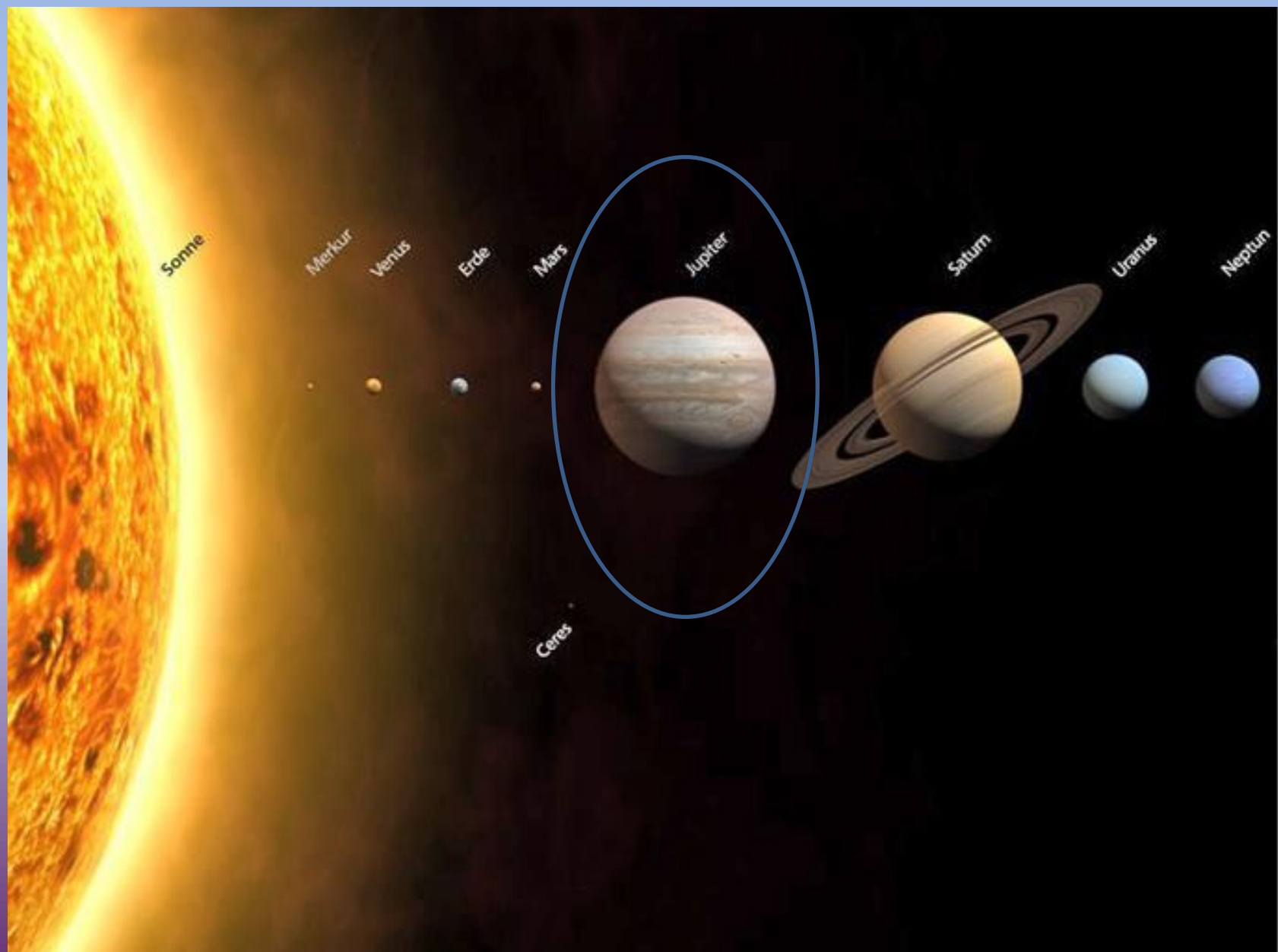
$$a = 0,4 + 0,3 * 2^n$$

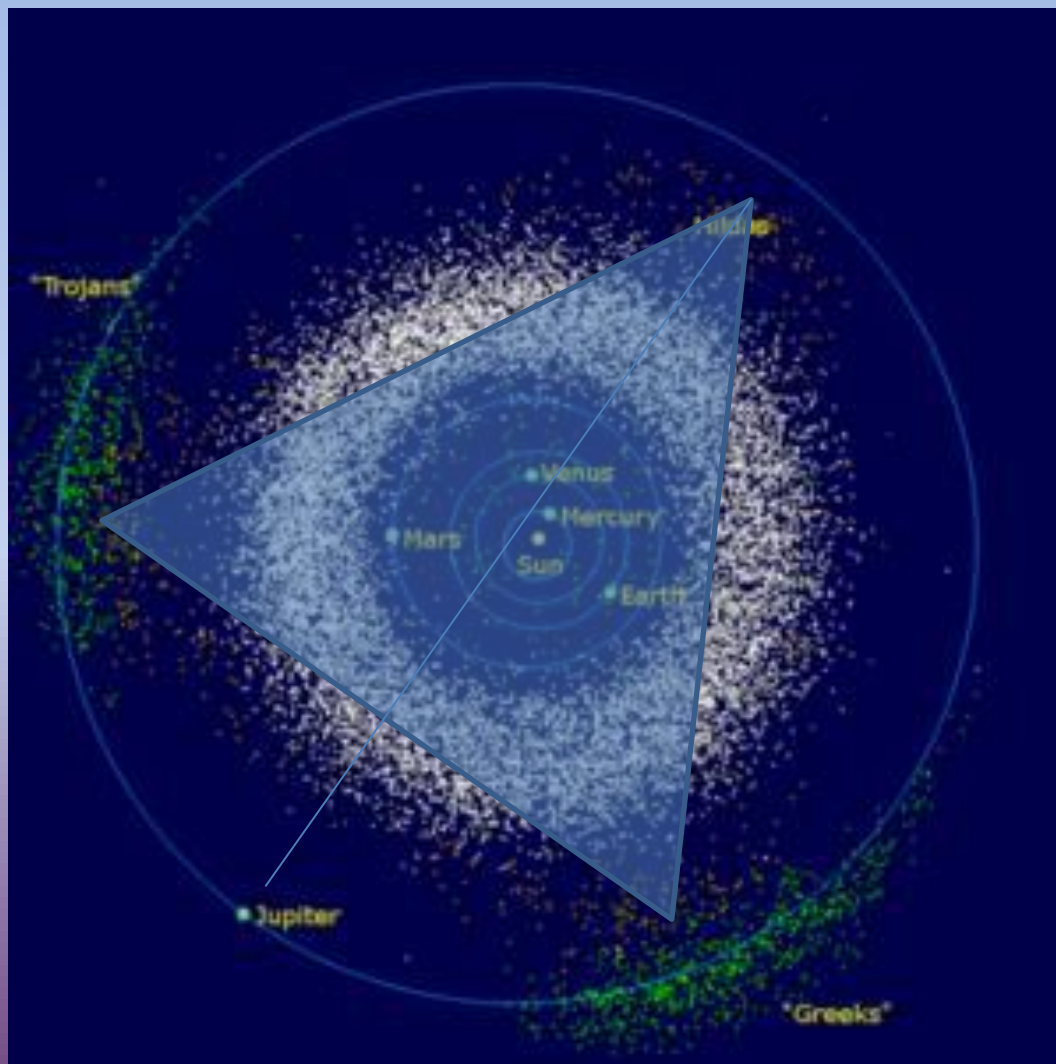
$$n=0,1,2, \dots$$

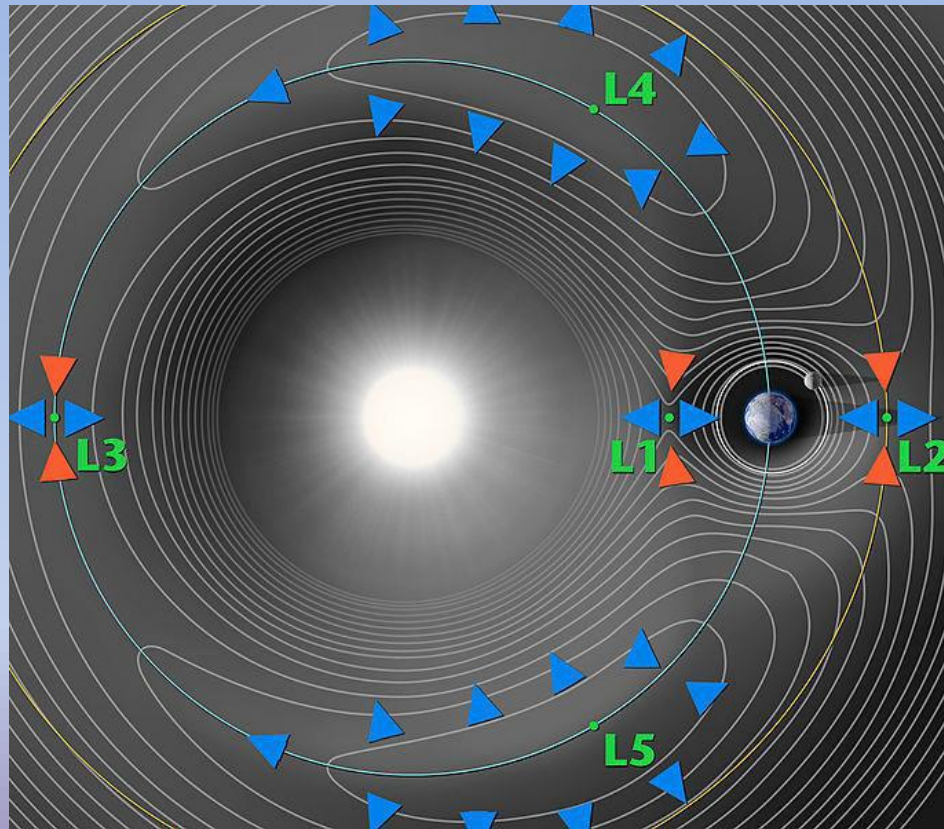
Simulationen zur Entstehung von Planetensystemen scheinen Resonanz-Effekte zwischen den Planeten als mögliche Ursache zu bestätigen.

<http://de.wikipedia.org/wiki/Titius-Bode-Reihe#Kontroverse>

Planet	n	Abstand nach T-B	Wirklicher Abstand	Abweichung
Merkur	$-\infty$	0,4	0,39	+ 2,56 %
Venus	0	0,7	0,72	- 2,78 %
Erde	1	1,0	1,00	0,00 %
Mars	2	1,6	1,52	+ 5,26 %
(Ceres)	3	2,8	(2,77)	(+ 1,08 %)
Jupiter	4	5,2	5,20	0,00 %
Saturn	5	10,0	9,54	+ 4,82 %
Uranus	6	19,6	19,19	+ 2,14 %
Neptun	–	–	30,06	–
(Pluto)	7	38,8	(39,48)	(- 1,72 %)
(Eris)	8	77,2	(67,7)	(+ 14,0 %)

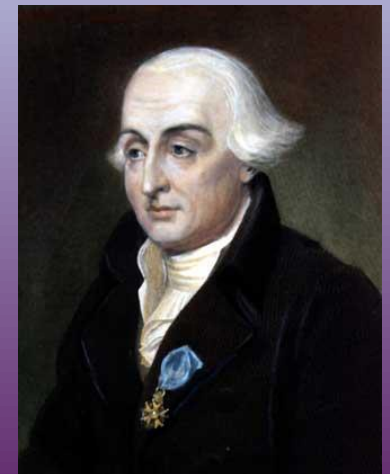


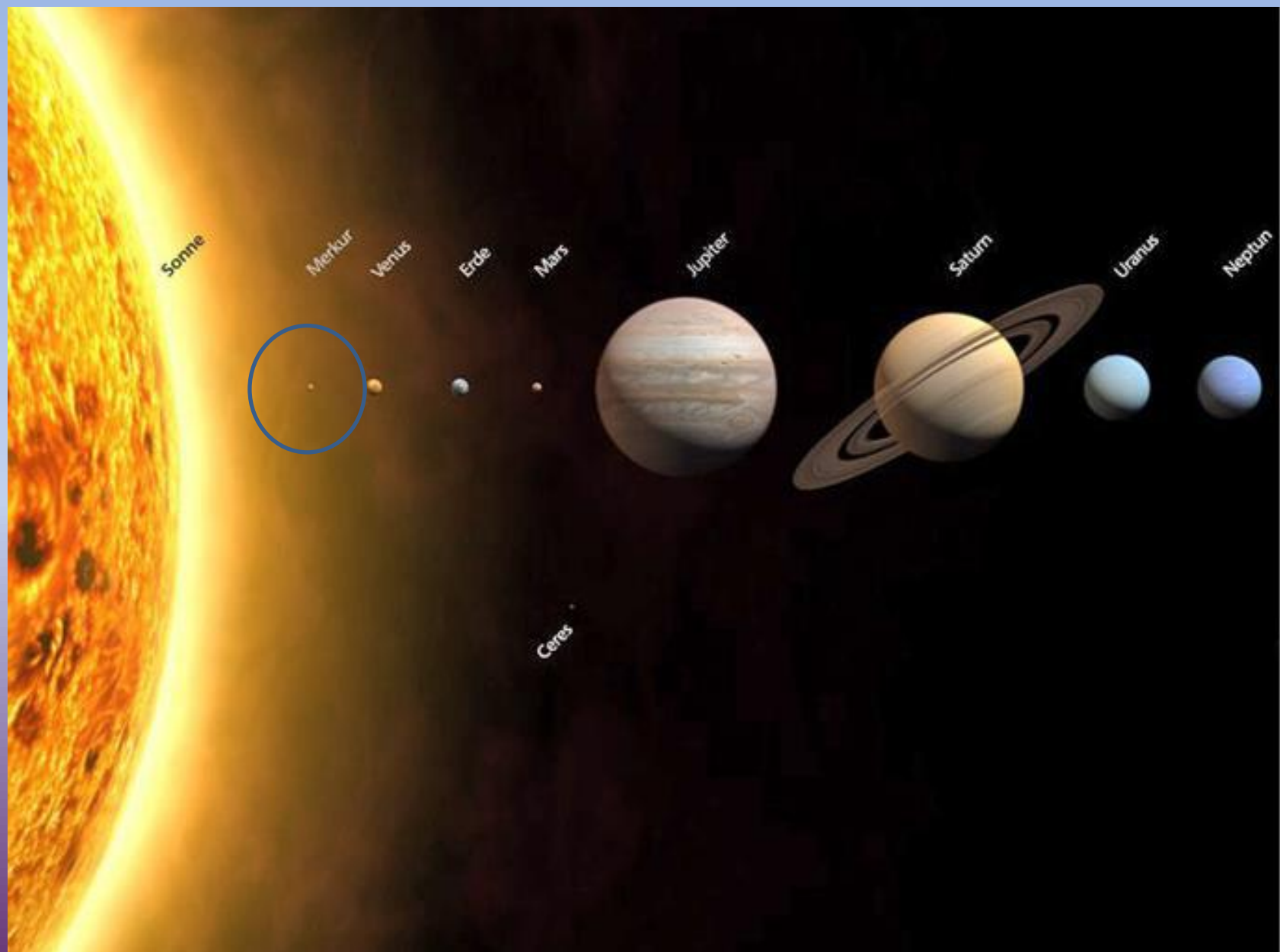




<http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte>

Joseph-Louis de Lagrange (* 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; † 10. April 1813 in Paris) war ein italienischer Mathematiker und Astronom.





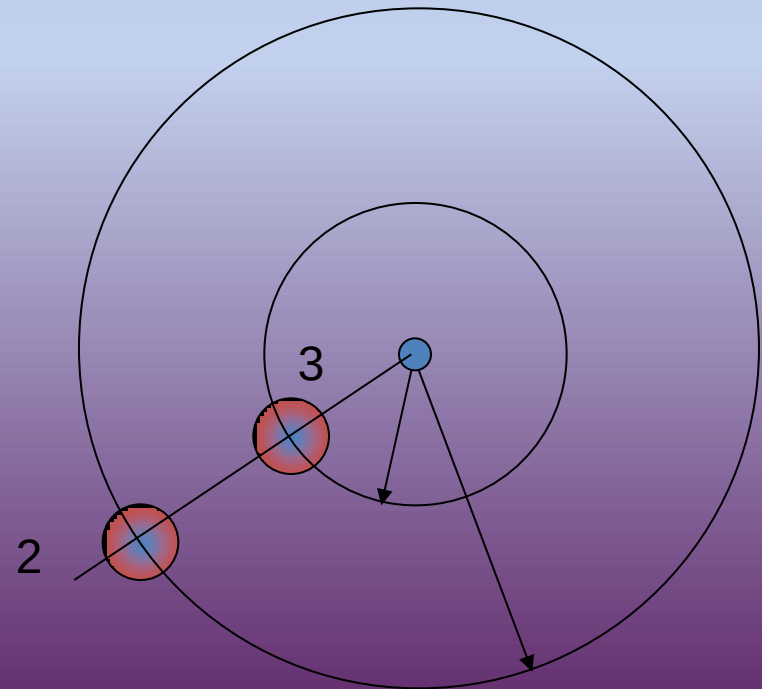
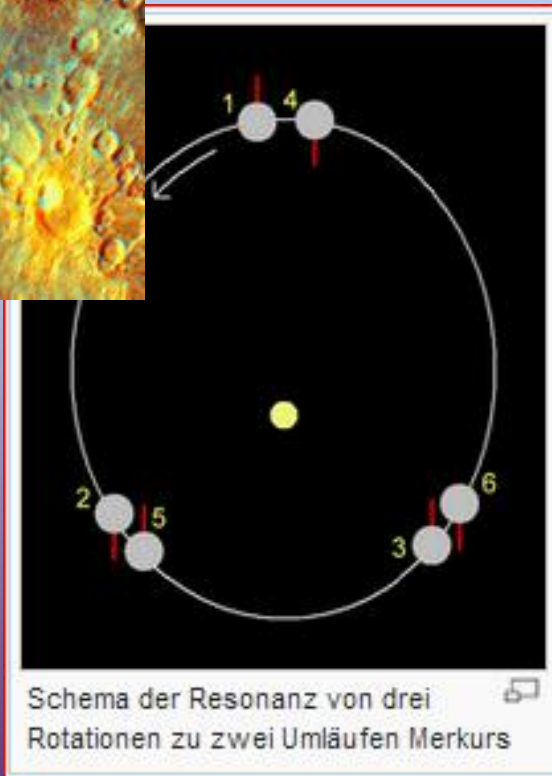
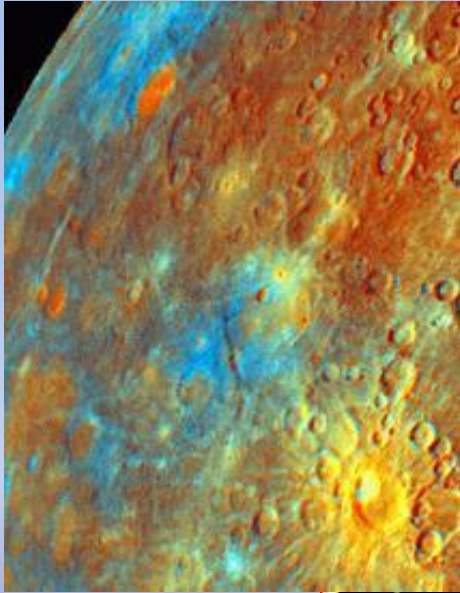


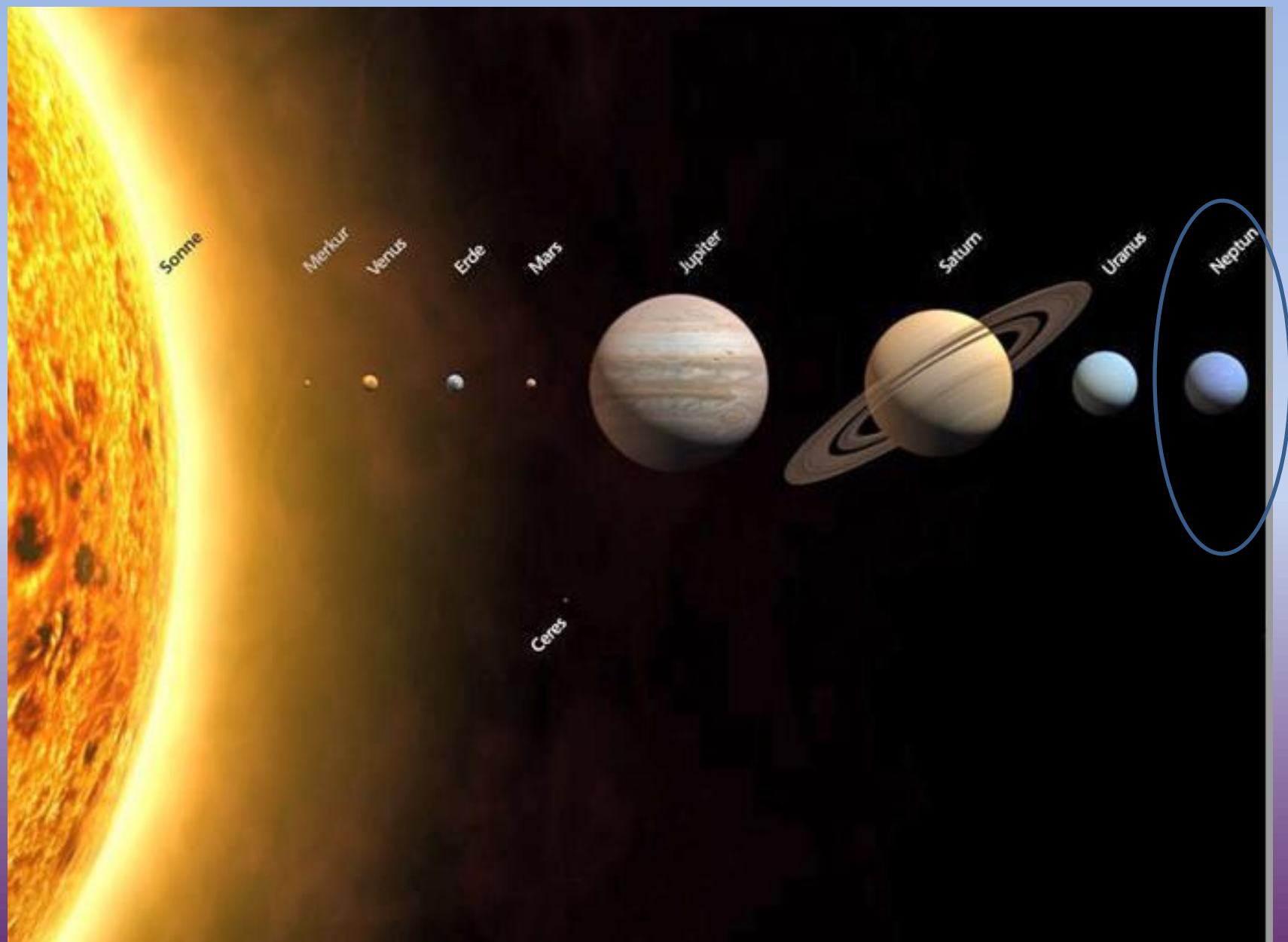
Merkur

Der Merkur läuft in $2 \times 58,646$ Tagen zwei Mal um die Sonne, dabei rotiert er drei Mal um seine eigene Achse.

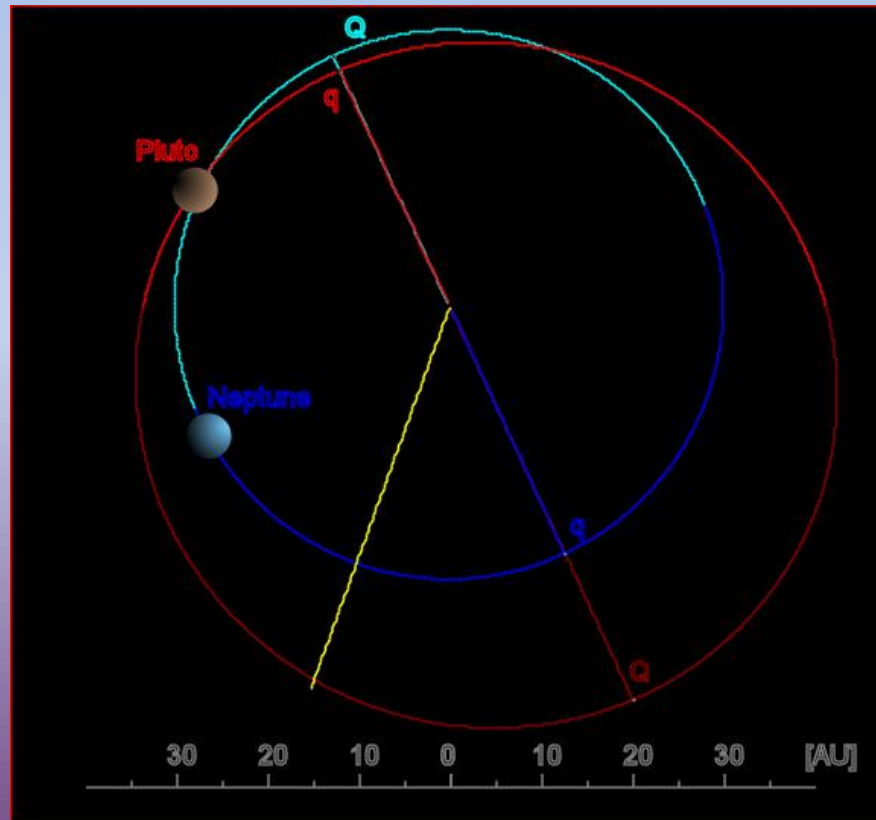
2:3-Kopplung an die schnelle Umlaufbewegung

[http://de.wikipedia.org/wiki/Merkur_\(Planet\)#Rotation](http://de.wikipedia.org/wiki/Merkur_(Planet)#Rotation)



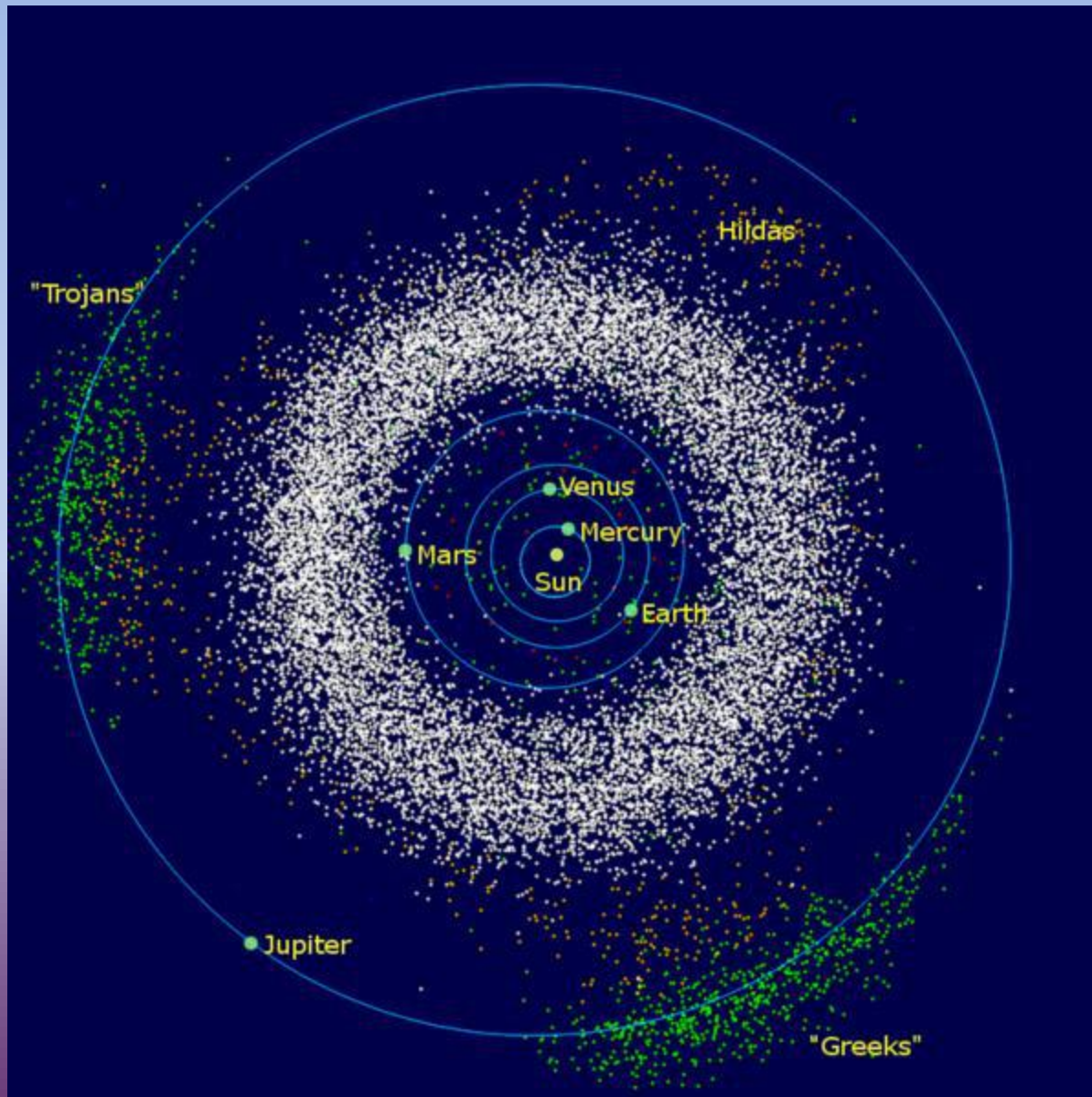


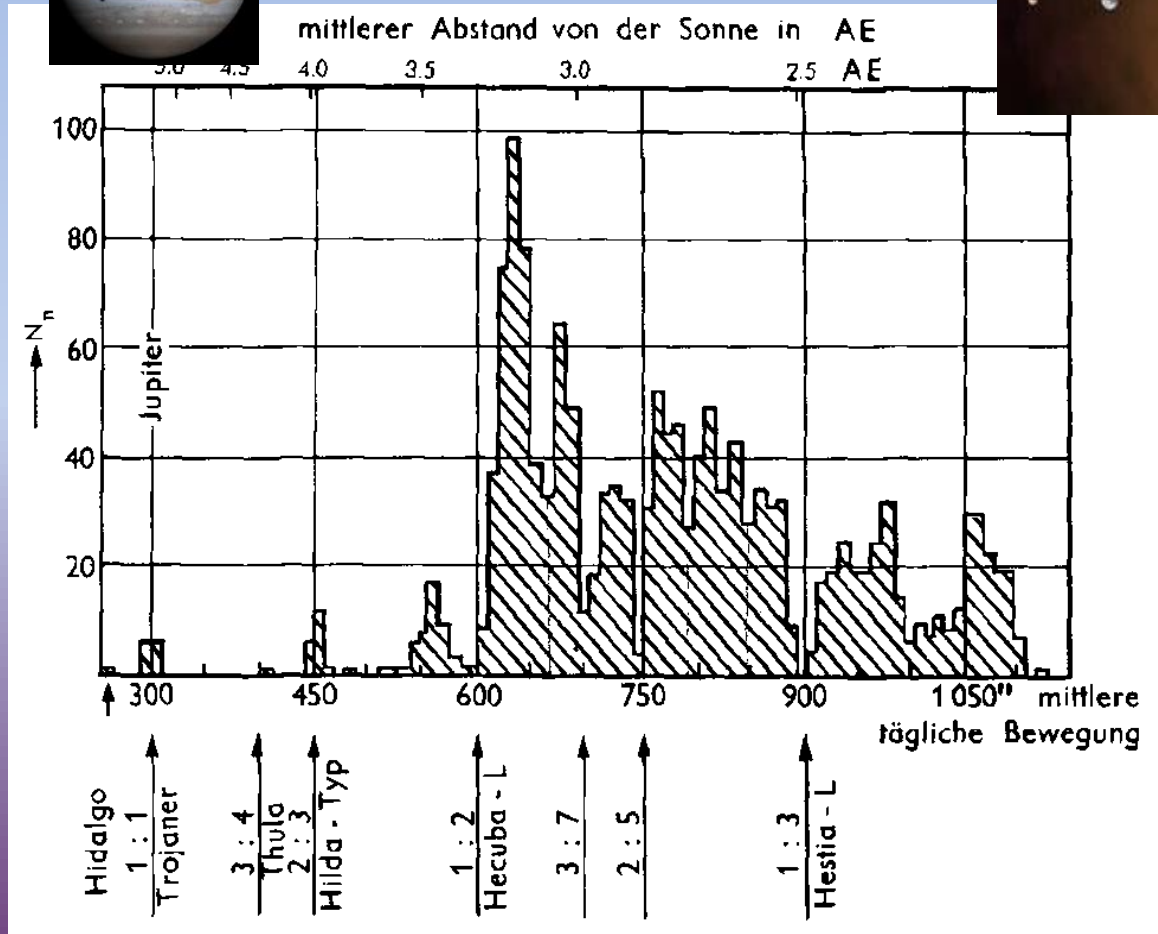
Auffällig ist, dass Pluto in der Zeit, in der sich Neptun drei Mal um die Sonne bewegt, zwei Mal um die Sonne läuft. Man spricht daher von einer 3:2-Bahnresonanz.

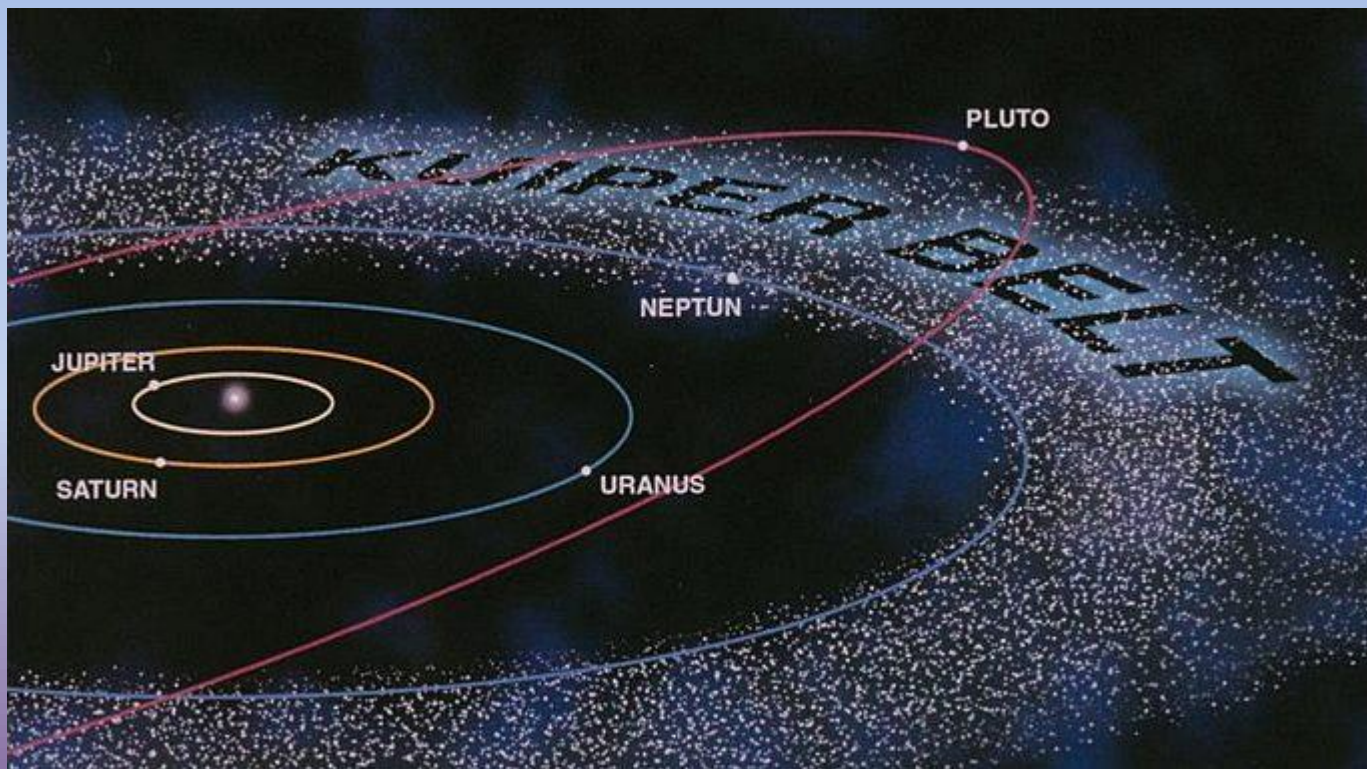


Asterioidengürtel

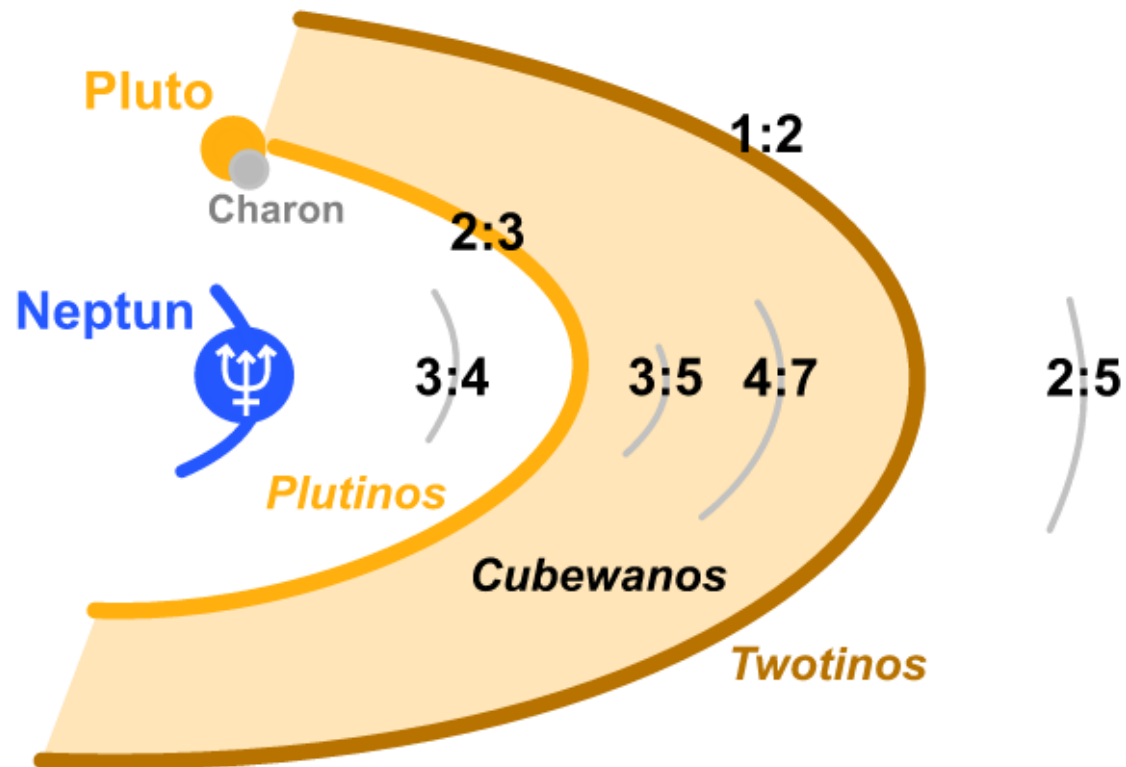


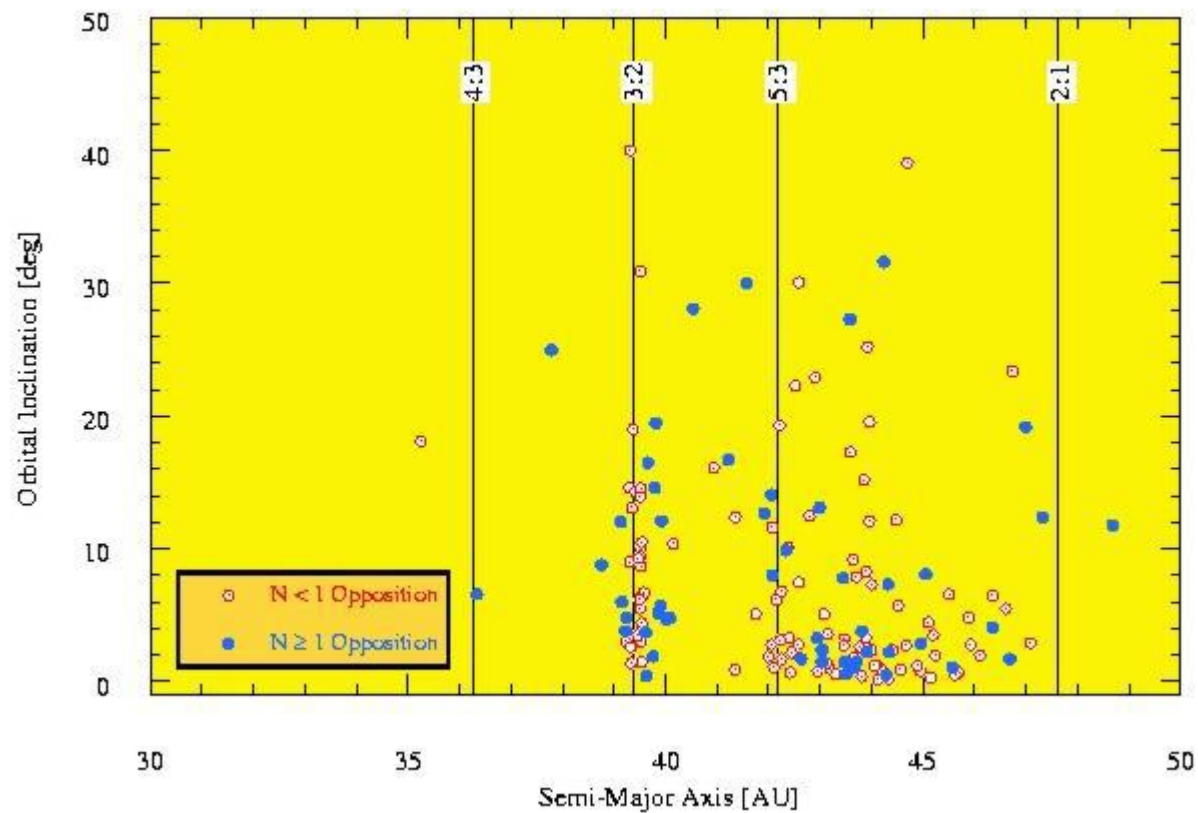




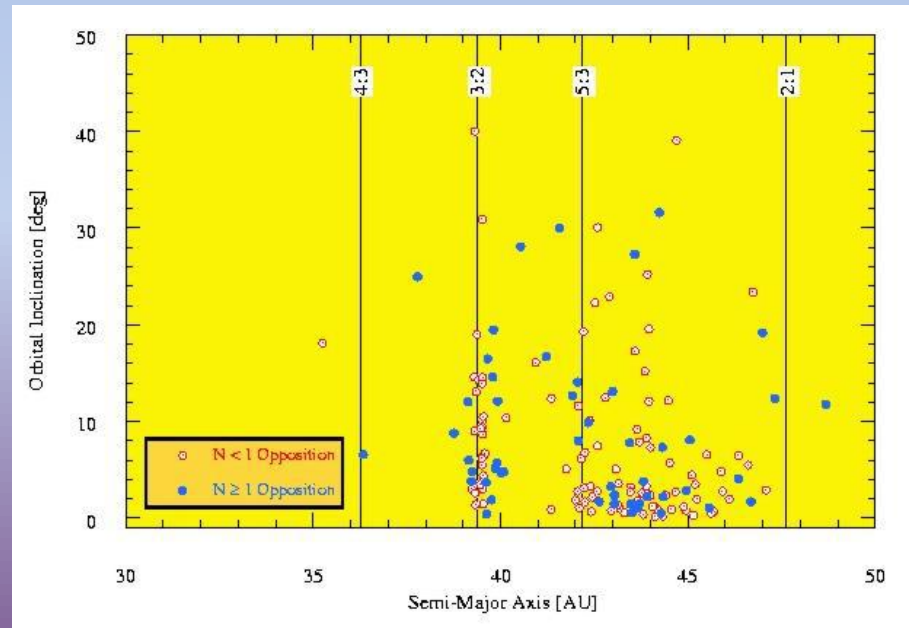
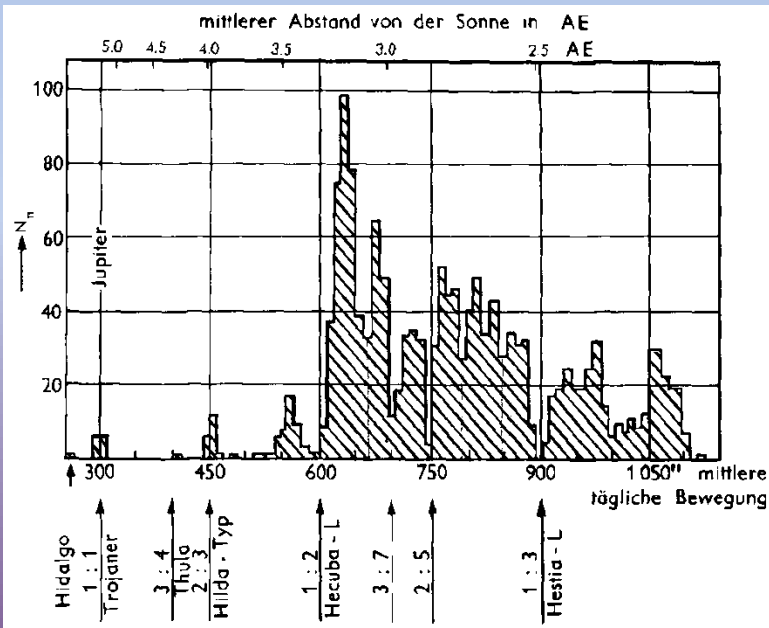


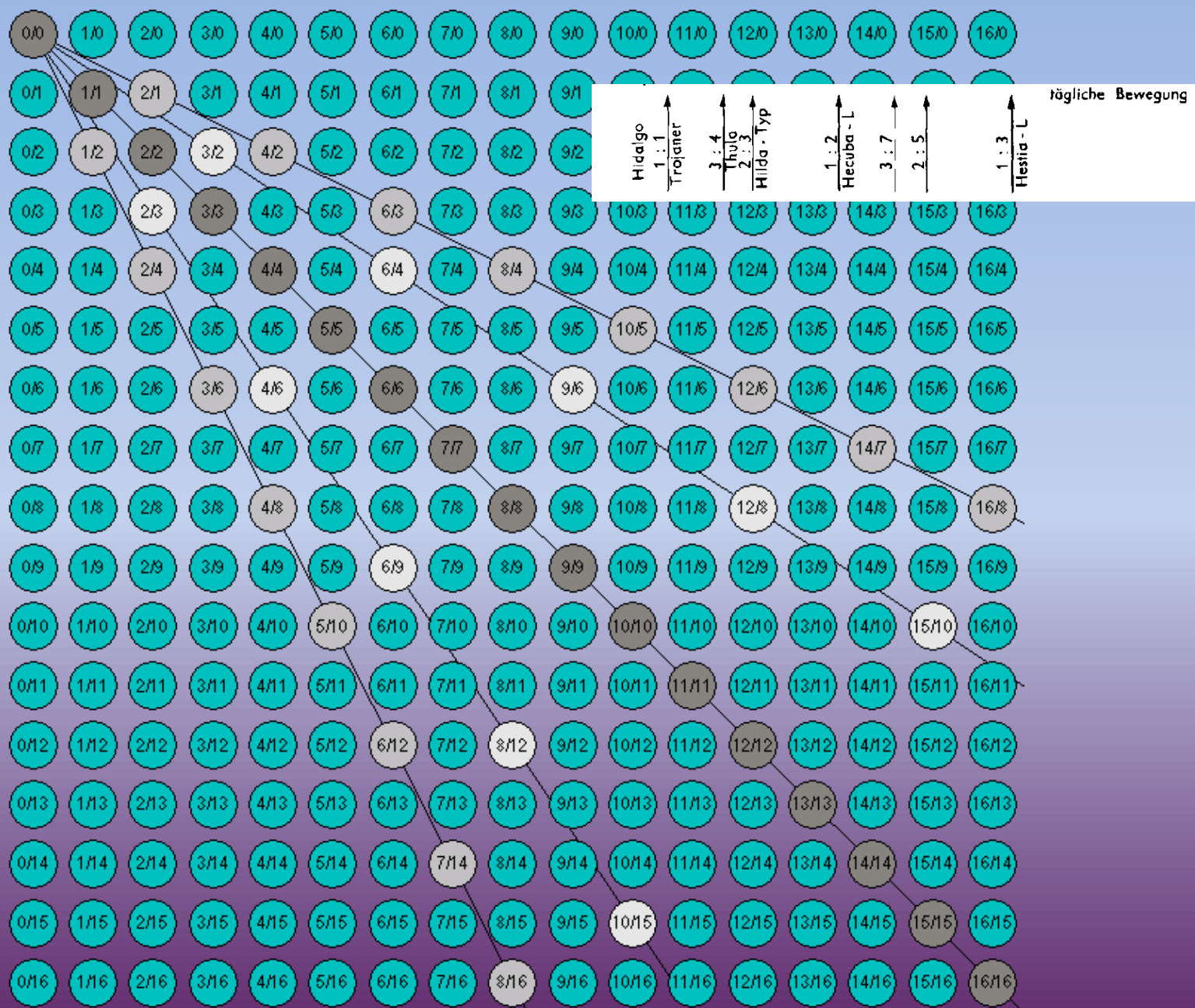
Kuiper-Gürtel und Bahnresonanzen

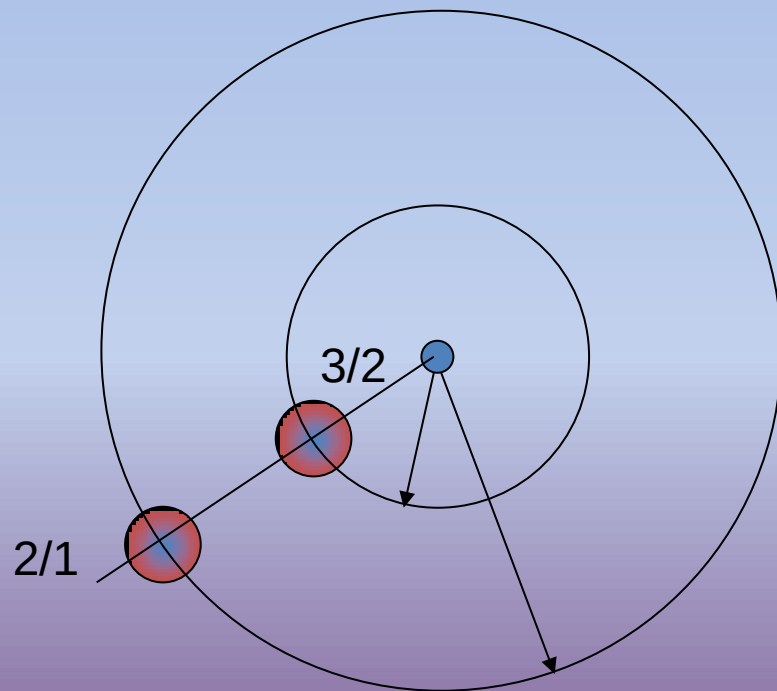


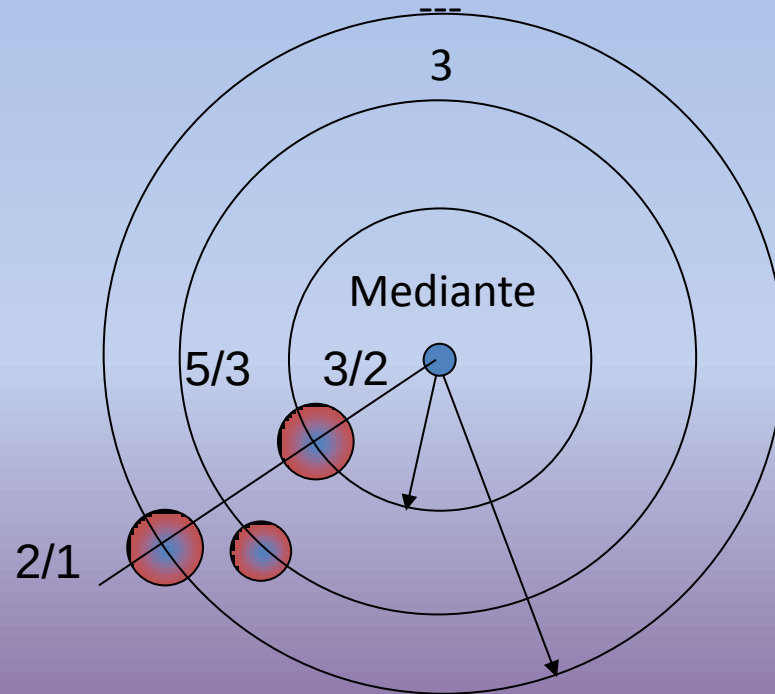


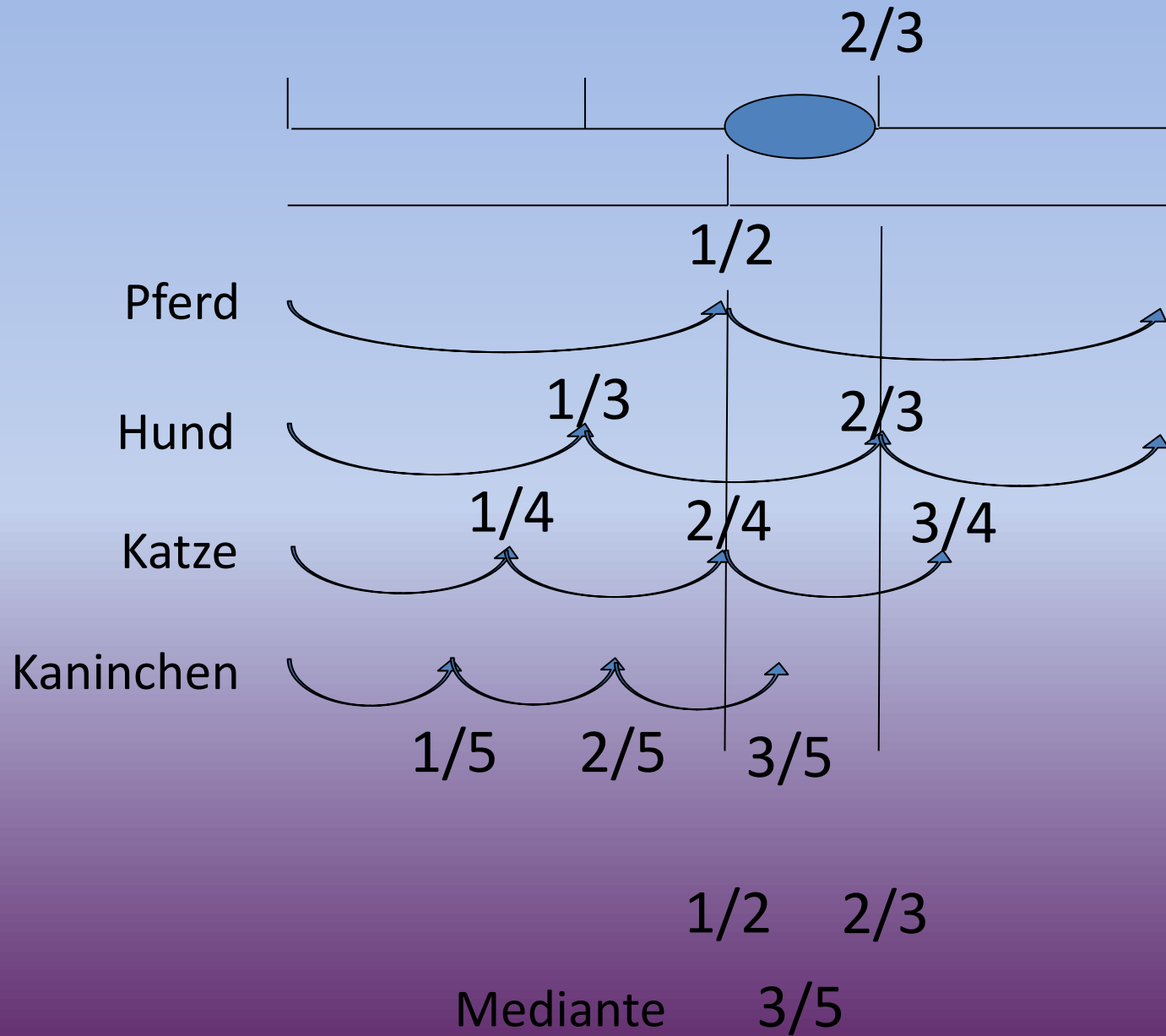
Gibt es einen harmonikalen Kontext der Lückenverteilung (Resonanzverteilung)





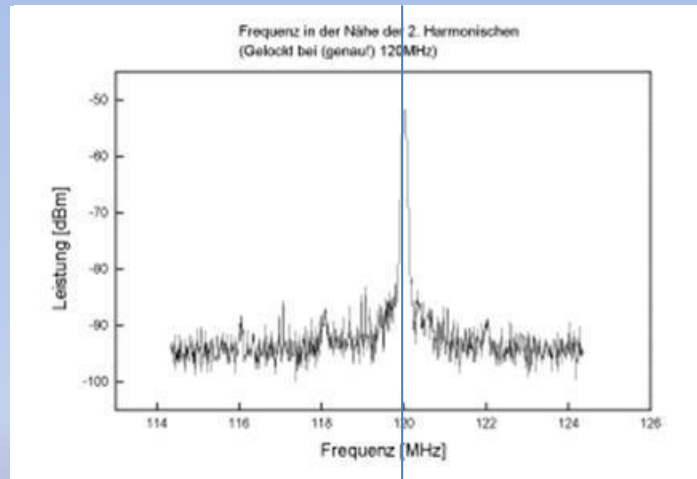






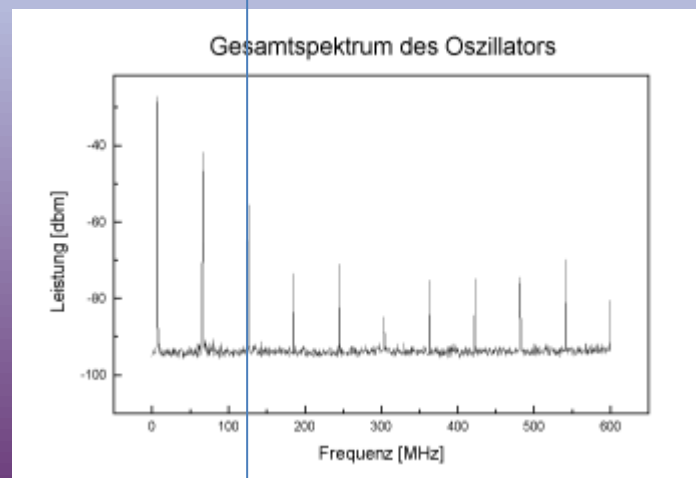
Aus der Chaostheorie weiß man, dass zwei frequenzgekoppelte Systeme eine gemeinsame wahrscheinliche Koppelfrequenz bilden, welche durch die sogenannte **Mediante** der beiden Einzelfrequenzen gebildet wird. 1) S.352 ff

Graph1 zeigt die 1.Oberschwingung im "Normalzustand" d.h. bei ausgeschaltetem Frequenzgenerator. Es ist deutlich eine Frequenzinstabilität zu beobachten (kein scharfes Spektrum).

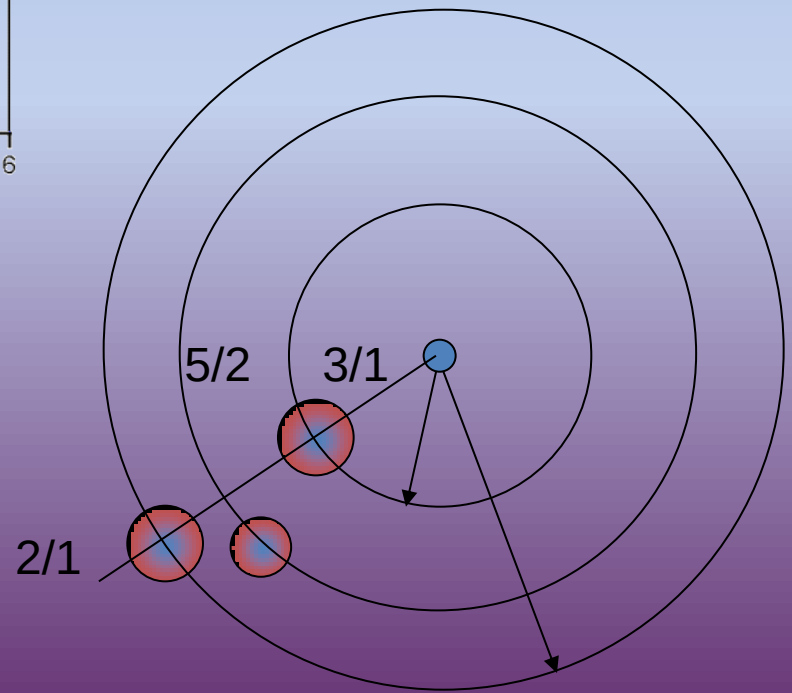
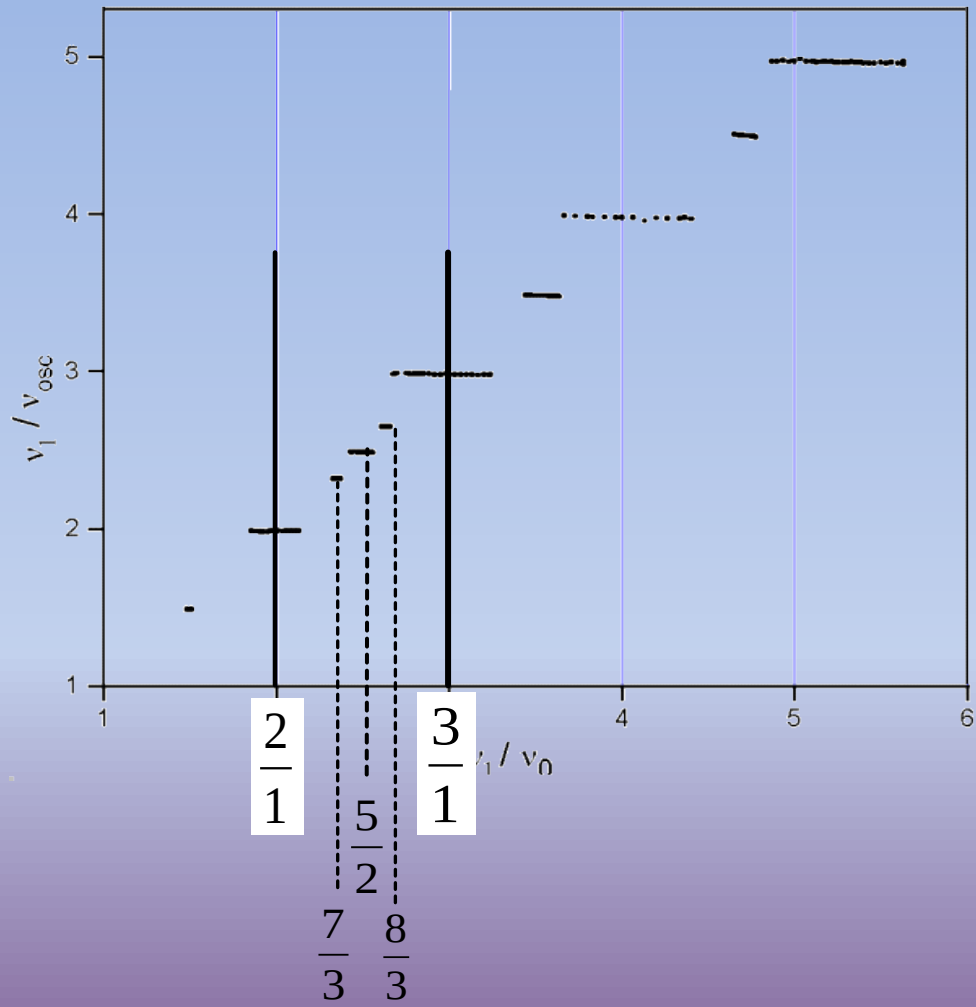


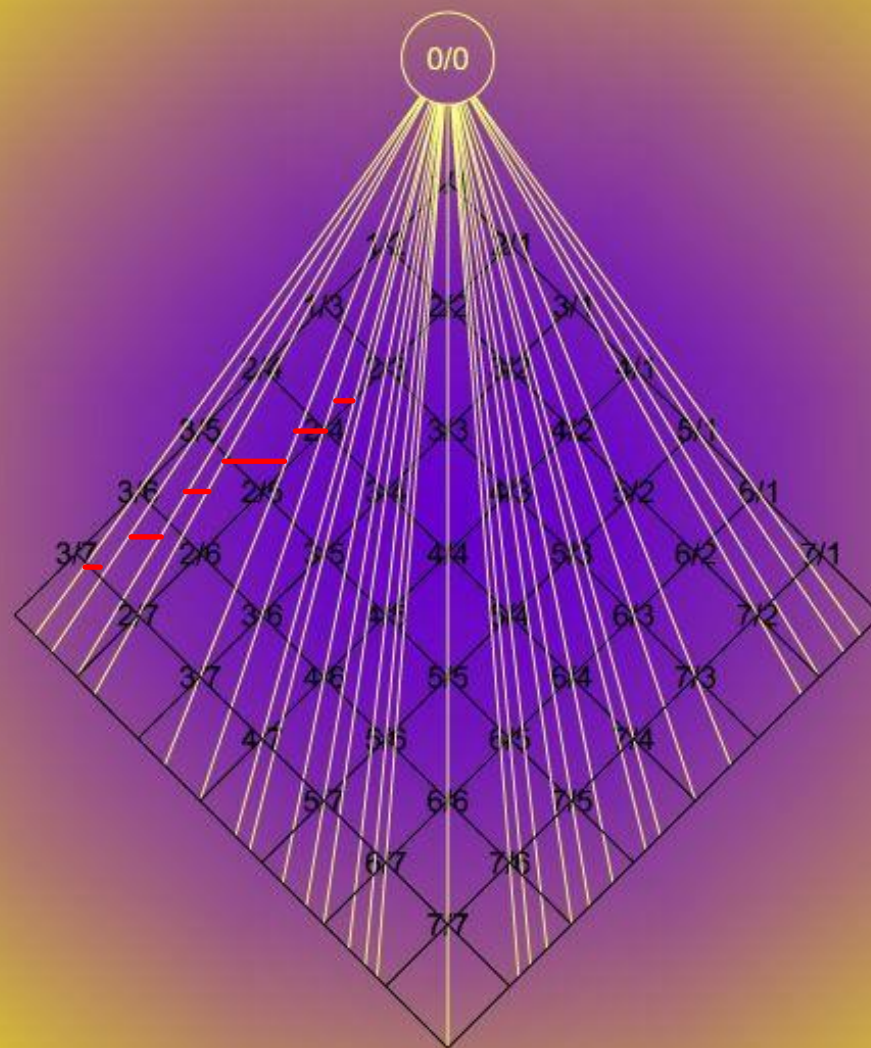
Oszillator mit
harmonischem
Frequenzspektrum
Wird dazu
geschaltet

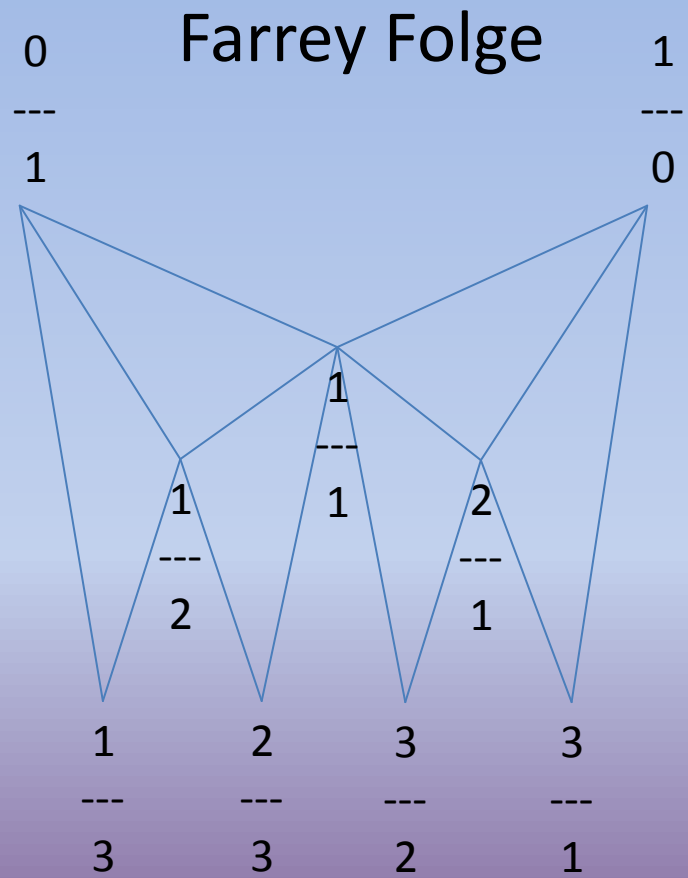
1) Fraktale, Chaos und
Selbstähnlichkeit
Manfred Schroeder
Spektrum Verlag



Devil's Staircase

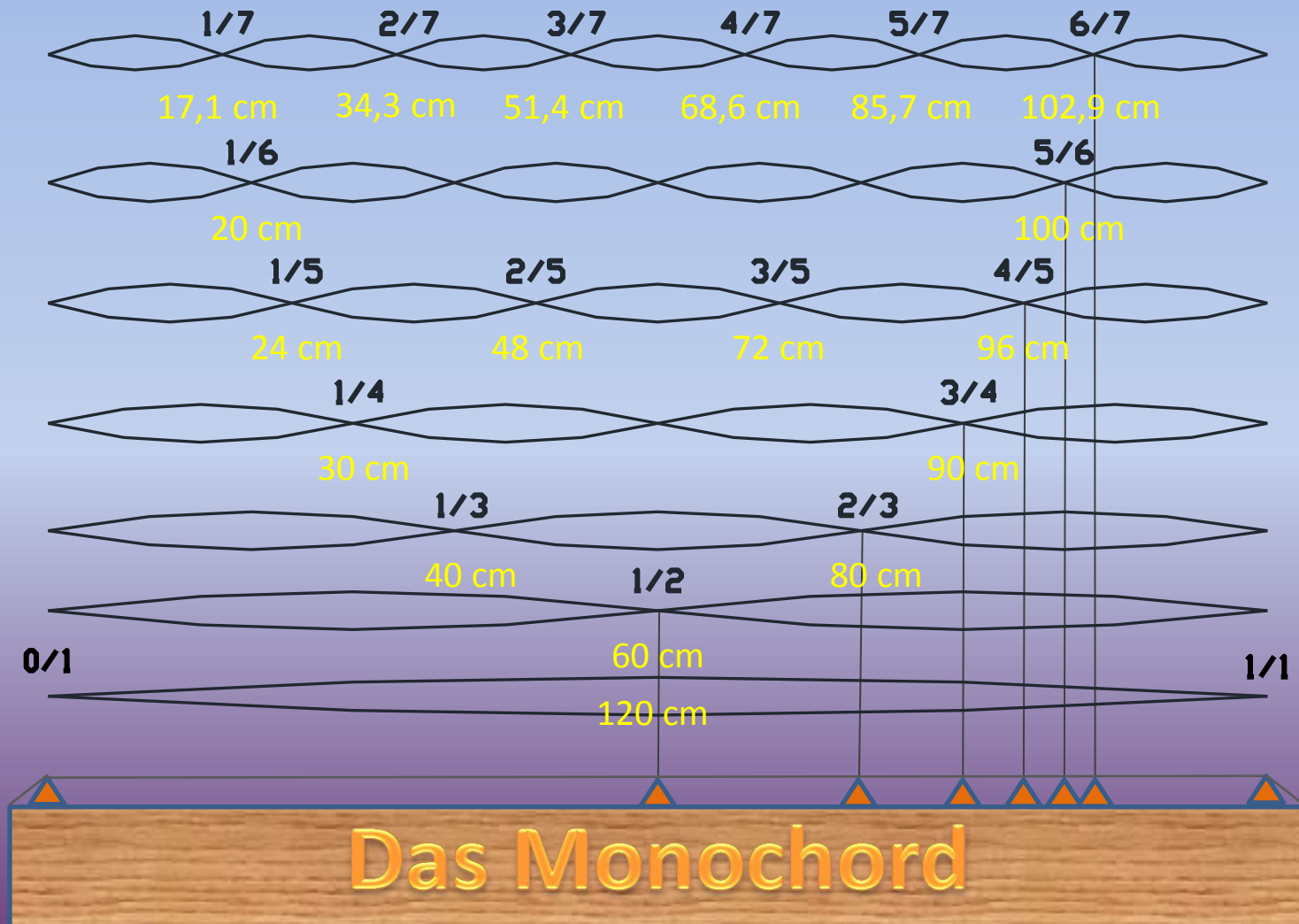


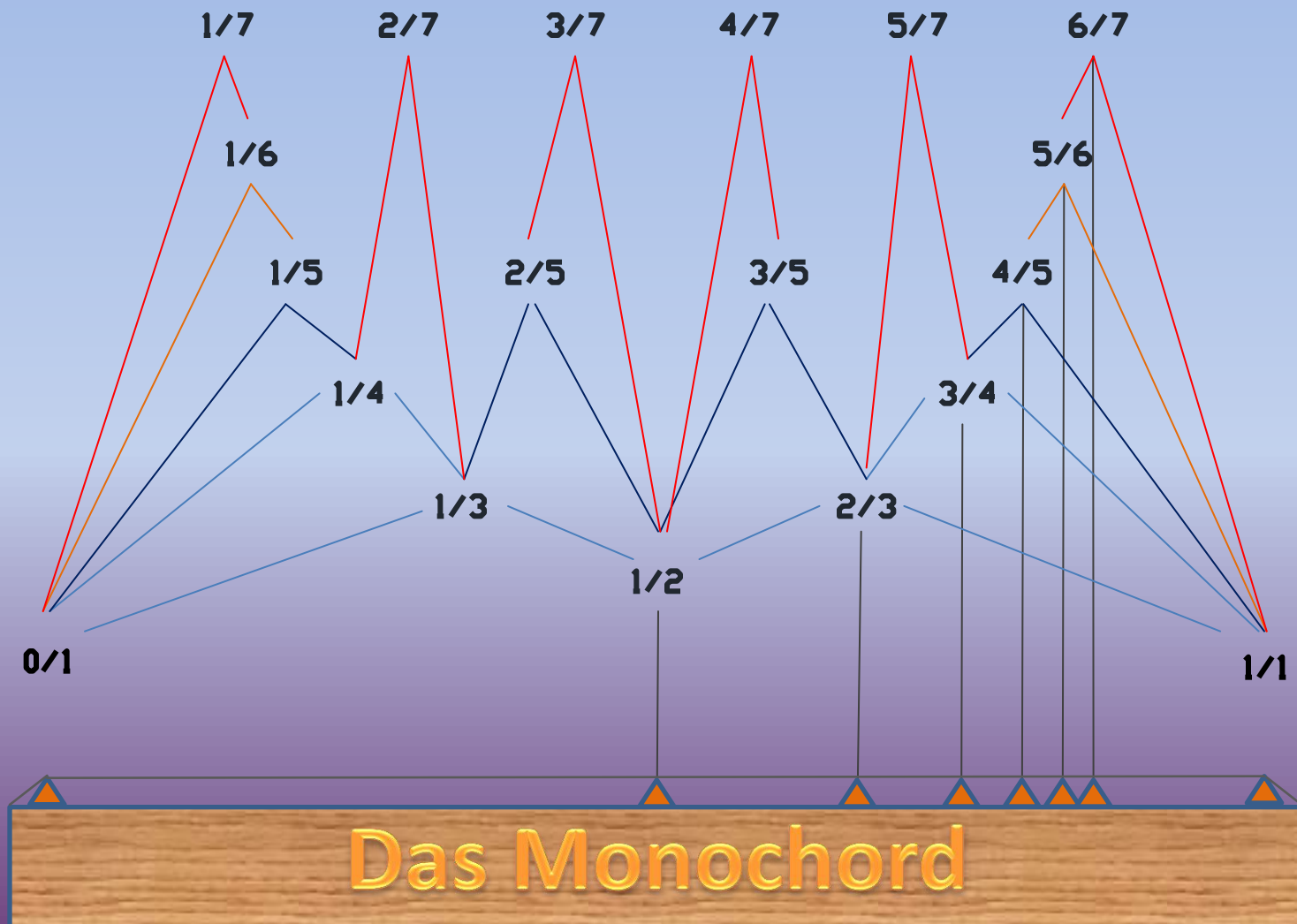




	0	1	1	2	1	3	2	3	1
	---	---	---	---	---	---	---	---	---
F_4	1	3	2	3	1	2	1	1	0

Die Farrey Folge in der Obertonreihe

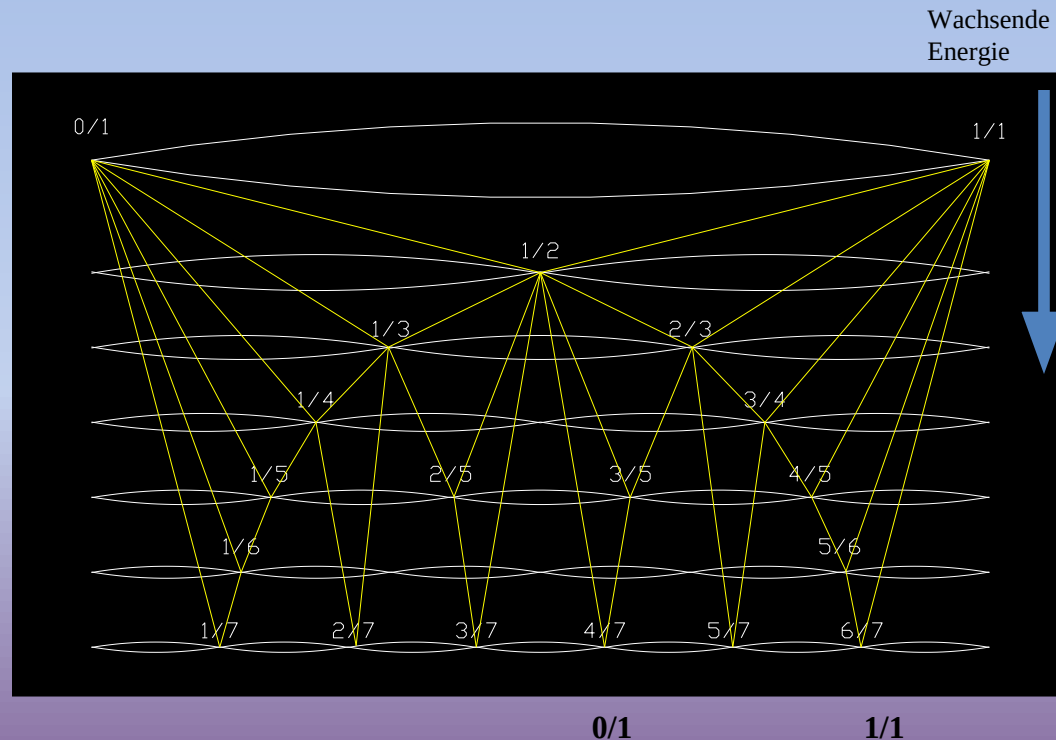




Die Farey-Folge oder die zweidimensionale Fibonaccireihe

In unserer Darstellung lassen sich die angegebenen Brüche auf einfache Weise finden. Die oberste Reihe beginnt mit den Brüchen $0/1, 1/1$. Addiert man nun Zähler $0+1=1$ und Nenner $1+1=2$, so ist der erste Bruch $1/2$ gefunden. Ebenso verfährt man mit allen anderen. Die Elternbrüche $0/1$, und $1/3$ ergeben $1/4$ usw. Dass sich diese auf die Obertöne abbilden lässt zeugt von ihrer universellen Bedeutung,

Die gelben Verbindungslinien Markieren jeweils die Elternbrüche, aus denen die Nachfolger hervorgingen. Die Knoten auf denen gelbe Zeugerlinien treffen haben über sich keinen Punkt. Das heißt ihre Position in der Waagerechten Achse ist einmalig. Eine senkrechte Gerade durch einen beliebigen Knoten würde niemals auf einen anderen Knoten treffen. Es treten nur gekürzte Brüche auf.



Das Prinzip der Addition zweier Vorgängerzahlen entspricht dem der Fibonaccireihe.

Eine dreieckig geformte Darstellung der Fareyfolge Zeigt die darin enthaltene Ordnung.

0/1 1/1
 1/2
 1/3 2/3
 1/4 2/4 3/4
 1/5 2/5 3/5 4/5
 1/6 2/6 3/6 4/6 5/6
 1/7 2/7 3/7 4/7 5/7 6/7

Die Farey-Folge $F_7 = \{1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 1/1\}$

0/1

1/0

0/1

1/2

2/1

1/3

2/3

3/2

3/1

1/4

2/5

3/5

3/4

4/3

5/3

5/2

4/1

1/5

2/7

3/8

3/7

4/7

5/8

5/7

4/5

5/4

7/5

8/5

7/4

7/3

8/3

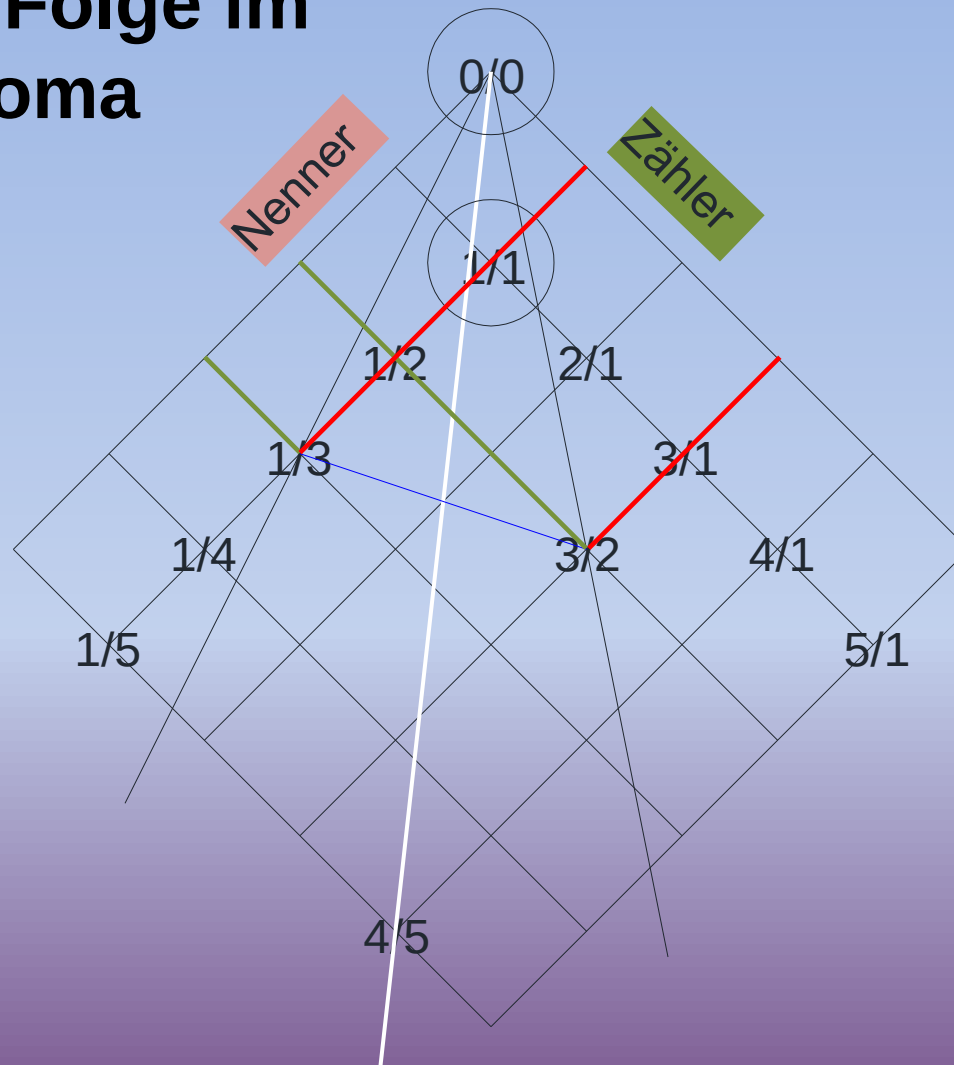
7/2

5/1

1/6 2/9 3/11 3/10 4/11 5/13 5/12 4/9 5/9 7/12 8/13 7/11 7/10 8/11 7/9 5/6 6/5 9/7 11/8 10/7 11/7 13/8 12/7 9/5 9/4 12/5 13/5 11/4 10/3 11/3 9/2 6/1

1/7 2/11 3/14 4/15 5/18 5/17 4/13 5/14 1/5 8/11 7/10 7/11 8/10 7/9 6/10 5/16 10/18 10/17 10/16 9/14 9/13 10/17 13/18 10/5 10/13 10/14 8/11 6/7 7/6 11/9 10/11 13/10 10/6 10/13 11/12 13/9 14/9 10/12 10/13 10/11 10/10 10/9 10/8 10/7 10/6 10/5 10/4 10/3 10/2 10/1 9/1

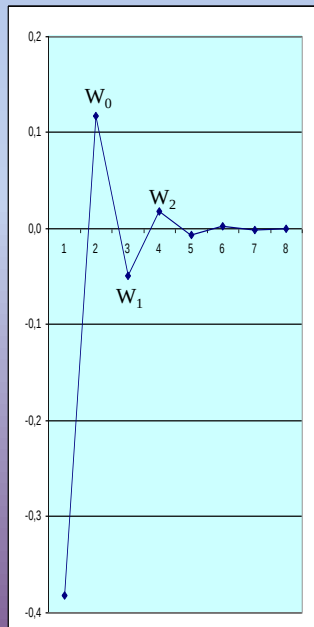
Die Farrey Folge im Lamdoma



Die Mediante führt auf den ersten
Gitterpunkt einer Gleichtonlinie

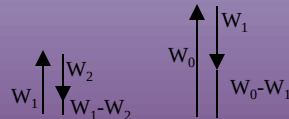
Die Konvergenzrate der Fibonaccibrüche

Wir wissen bereits, dass die Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen Näherungsbrüche ergeben, die sich immer mehr an den goldenen Schnitt annähern. Die Mathematiker haben sich Gedanken darüber gemacht, wie schnell diese Annäherung erfolgt. Sie haben dafür ein Maß geschaffen, die sogenannte Konvergenzrate. Es ist der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Abweichungen zweier Näherungsbrüche. Diese Konvergenzrate ist außerordentlich Bedeutsam bei der Betrachtung chaotischer Vorgänge. Sie besitzt, wie auch der Goldene Schnitt selbst den Charakter einer Naturkonstante vom Rang einer Feigenbaumkonstante.



Die Tabelle enthält alle Schritte zur Berechnung der Konvergenzrate, die sich aus den Näherungsbrüchen der Fibonaccizahlen ergeben. In der Grafik links sind die Abweichungen grafisch aufgetragen. Der Grenzwert des Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Abweichungen W ist dann:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{W_i - W_{i+1}}{W_{i-1} - W_i} = g^2$$



	Fibonacci-reihe F_i	Quotienten F_i/F_{i+1}	Abweichung	Quotienten der Abweichungen
F0	0			
F1	1			
F2	1	1,00000000	-0,38196601	
F3	2	0,50000000	0,11803399	-0,30902
F4	3	0,66666667	-0,04863268	-0,41202
F5	5	0,60000000	0,01803399	-0,37082
F6	8	0,62500000	-0,00696601	-0,38627
F7	13	0,61538462	0,00264937	-0,38033
F8	21	0,61904762	-0,00101363	-0,38259
F9	34	0,61764706	0,00038693	-0,38173
F10	55	0,61818182	-0,00014783	-0,38206
F11	89	0,61797753	0,00005646	-0,38193
F12	144	0,61805556	-0,00002157	-0,38198
Werte mit 8.-Stelliger Genauigkeit		...	...	...
		0,61803399		0,381966011
		Goldener Schnitt		Konvergenzrate

Abweichungen nähert sich dem Wert g^2 .

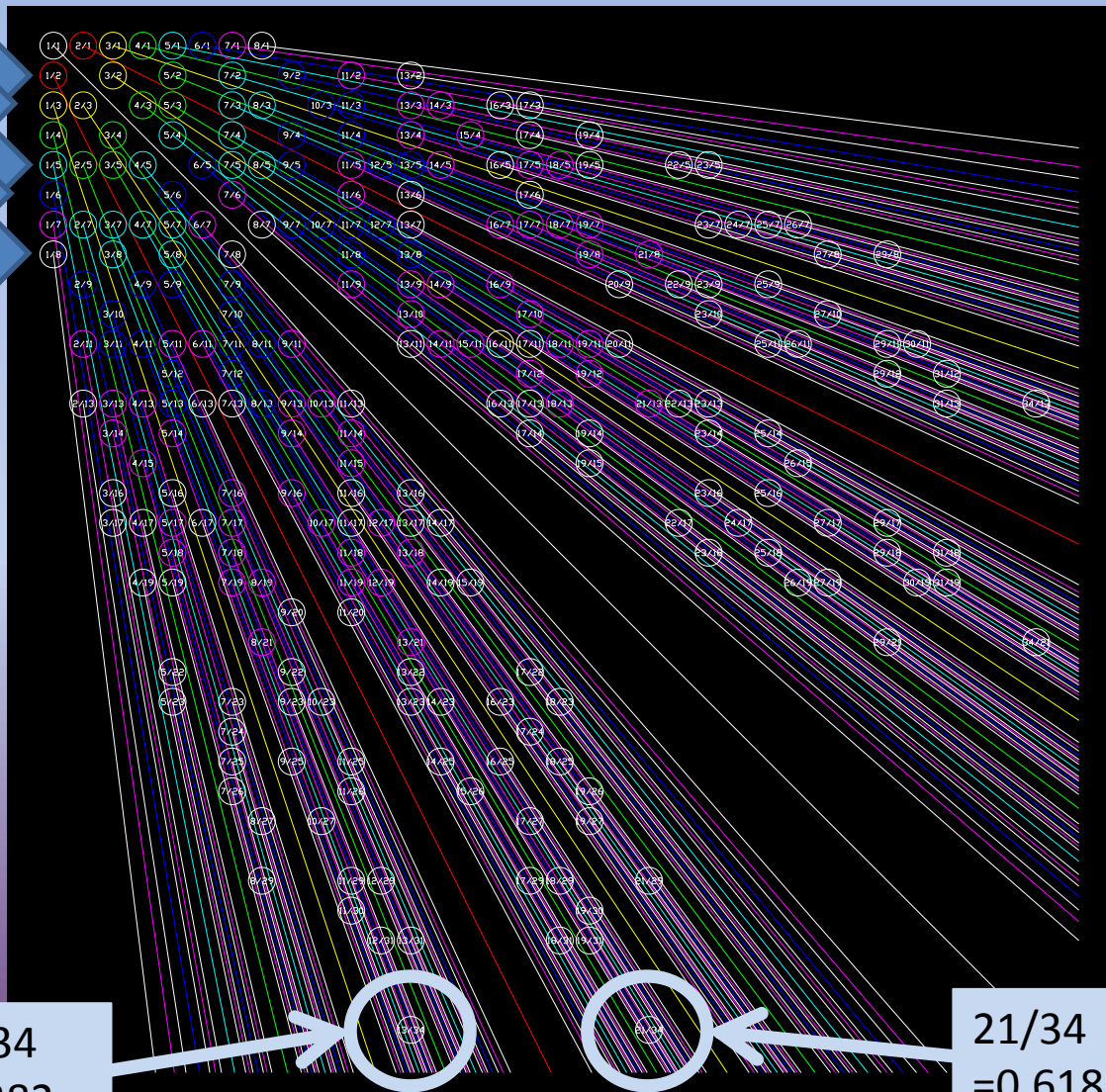
Alle anderen Irrationalen Zahlen haben größere Konvergenzraten. Der goldene Schnitt wird daher als die irrationalste aller Irrationalen Zahlen bezeichnet. Er lässt sich am schlechtesten durch Approximation annähern.

	Fibonacci- reihe F_i	Quotienten F_i/F_{i+1}	Abweichung	Quotienten der Abweichungen
F0	0			
F1	1			
F2	1	1,00000000	-0,38196601	
F3	2	0,50000000	0,11803399	-0,30902
F4	3	0,66666667	-0,04863268	-0,41202
F5	5	0,60000000	0,01803399	-0,37082
F6	8	0,62500000	-0,00696601	-0,38627
F7	13	0,61538462	0,00264937	-0,38033
F8	21	0,61904762	-0,00101363	-0,38259
F9	34	0,61764706	0,00038693	-0,38173
F10	55	0,61818182	-0,00014783	-0,38206
F11	89	0,61797753	0,00005646	-0,38193
F12	144	0,61805556	-0,00002157	-0,38198
Werte mit 8.-Stelliger Genauigkeit		...	...	...
		0,61803399		0,381966011
		Goldener Schnitt		Konvergenz- rate

g

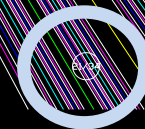
g²

- 1 Generation
- 2 Generation
- 3 Generation
- 4 Generation
- 5 Generation
- 6 Generation
- 7. Generation



g^2

$\frac{13}{34}$
=0,382...



$\frac{21}{34}$
=0,618...

g

Eine kleine Variation der Farey-Folge

Die Brüche in unten stehender Grafik wurden je nach Nenner höher oder tiefer platziert, die Elternbrüche sind mit Linien verbunden. Es gehen beispielsweise vom Bruch $1/2$, Linien zu den Elternbrüchen $0/1$ und $1/1$. Diese Form der Farey-Folge unterscheidet sich von der klassischen dadurch, dass alle Lücken zwischen den Elternbrüchen einer Generation gefüllt werden. Die Brüche jeder neuen Generation sind in unterschiedlichen Farben markiert. Die größten Nenner bilden die Fibonaccizahlen.

Die Farey-Folgen der 1. Bis 4. Generation

$$F_1 = \{0/1, 1/1\}$$

$$F_2 = \{0/1, 1/2, 1/1\}$$

$$F_3 = \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\}$$

$$F_4 = \{0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1\}$$

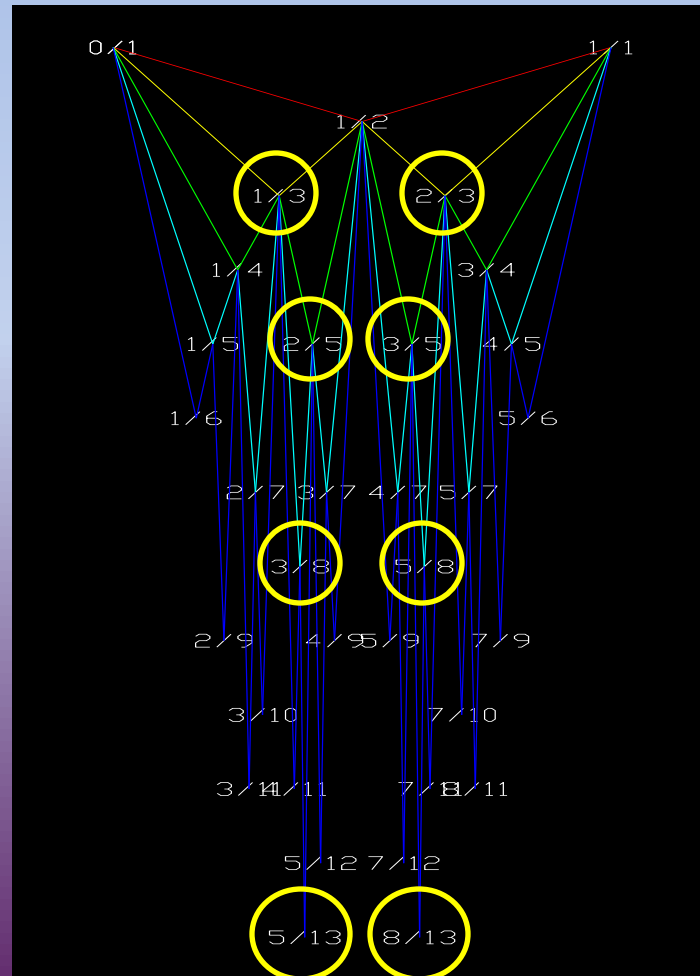
Wenn bis zur 4. Generation alle Brüche gebildet werden, dann ist der maximale Nenner die 4. Fibonaccizahl. Dies gilt auch für alle weiteren Generationen

Die Fibonaccizahlen

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ finden sich wieder in Nenner und Zähler der Farey-Folge. Wenn zwei Werte der Fibonacci-Reihe aufeinander folgen, dann entstehen durch fortwährende Addition nur noch Werte der Fibonacci-Reihe.

g^2

$$\frac{13}{34} = 0,382\dots$$



Standardform der Farey-Folge

$$F_4 = \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\}$$

In der Standardform der Farey-Folge fehlen in der 4. Generation die Brüche $2/5$ und $3/5$.

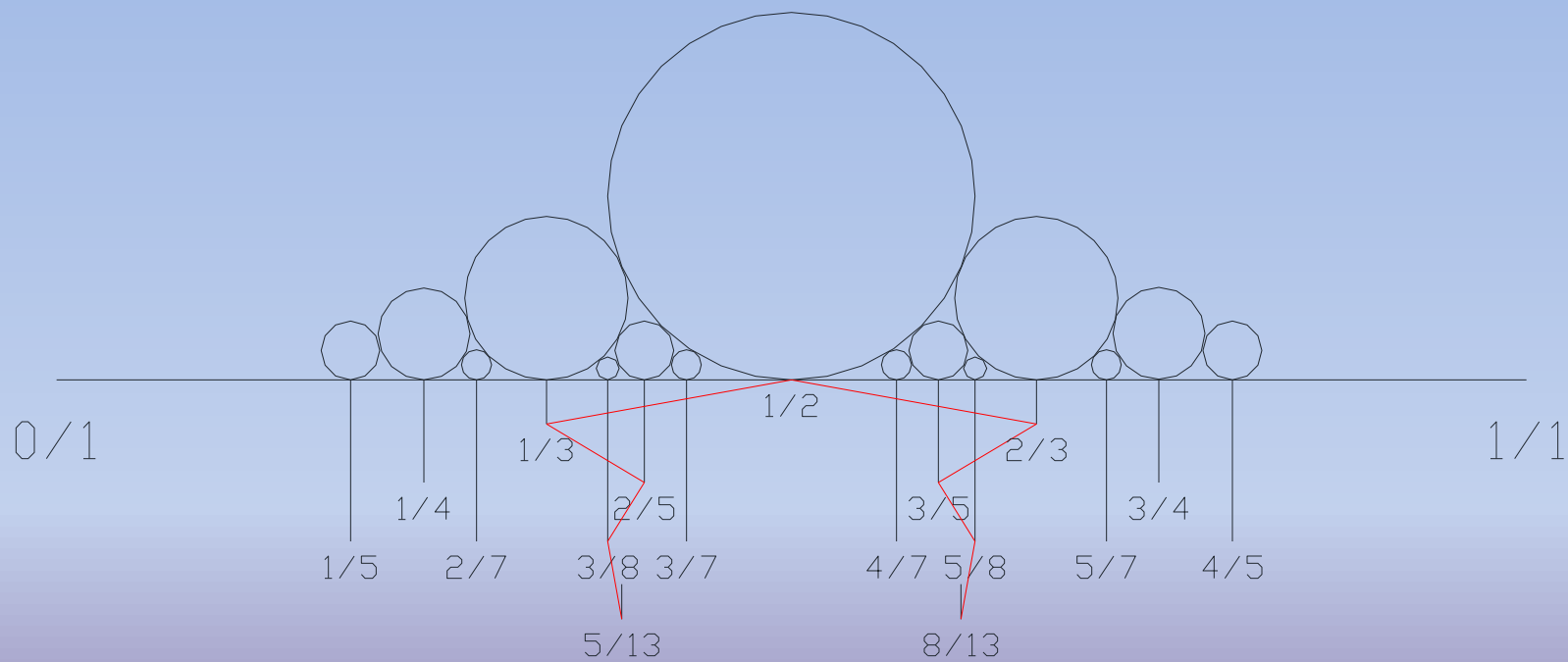
Es treten nur die Nenner 1-4 auf.

Dies gilt auch für alle weiteren Generationen

Die gelb markierten Brüche haben in Nenner und Zähler Fibonaccizahlen. Sie nähern die Werte des goldenen Schnitts $g=0,618\dots$ und $g^2=0,381\dots$ an.

$$\frac{21}{34} = 0,6176\dots$$

g

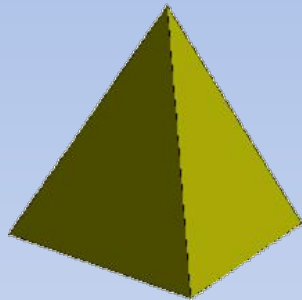


gg^2

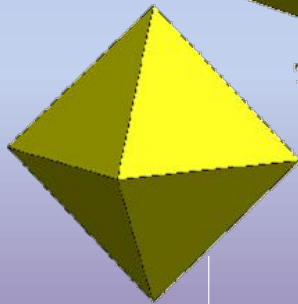
g

Reguläre Polyeder

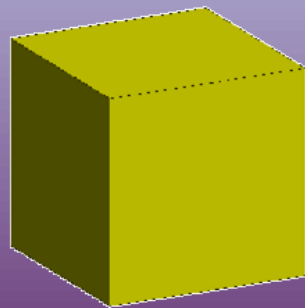
Die platonischen Körper



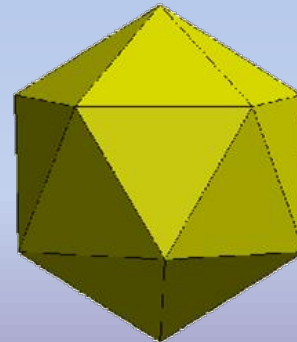
Tetraeder



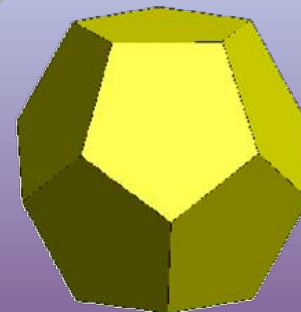
Oktaeder



Würfel



Ikosaeder



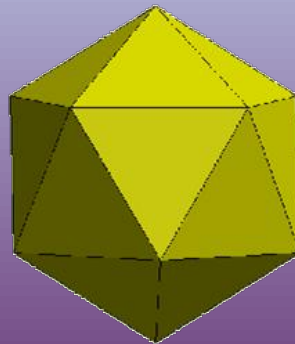
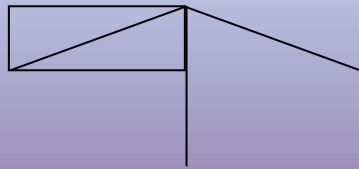
Dodekaeder

Reguläre Polyeder

Die platonischen Körper

Ikosaeder

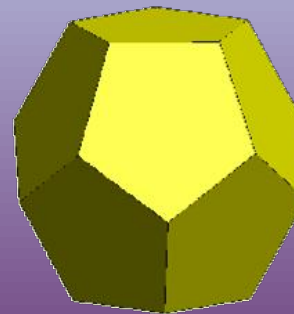
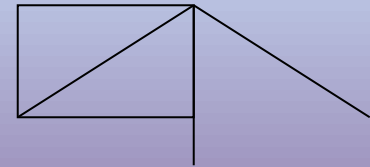
Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist $1/g^2$. Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten



Ikosaeder

Pentadodekaeder

Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist $1/g$. Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten



Dodekaeder

Die Farrey -Folge und die Ordnung der Platonischen Körper

Die Farreyfolge hat die Eigenschaft, daß Kreise mit dem Radius $R=1/(2 \cdot \text{Nenner}^2)$ sich berühren, wenn sie Maßstäblich zwischen 0 und 1 platziert werden. Siehe Harrrald Scheid, S82, Zahlentheorie, Wissenschaftsverlag, 1991 (Siehe Elektronenschalenbesetzung)

Das Bildungsgesetz der Fibonacci- Folge entspricht dem der Farrey-Folge. Bei entsprechenden Anfangswerten muss die Fibonacci-Folge und somit der „Goldene Schnitt“ entstehen.

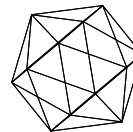
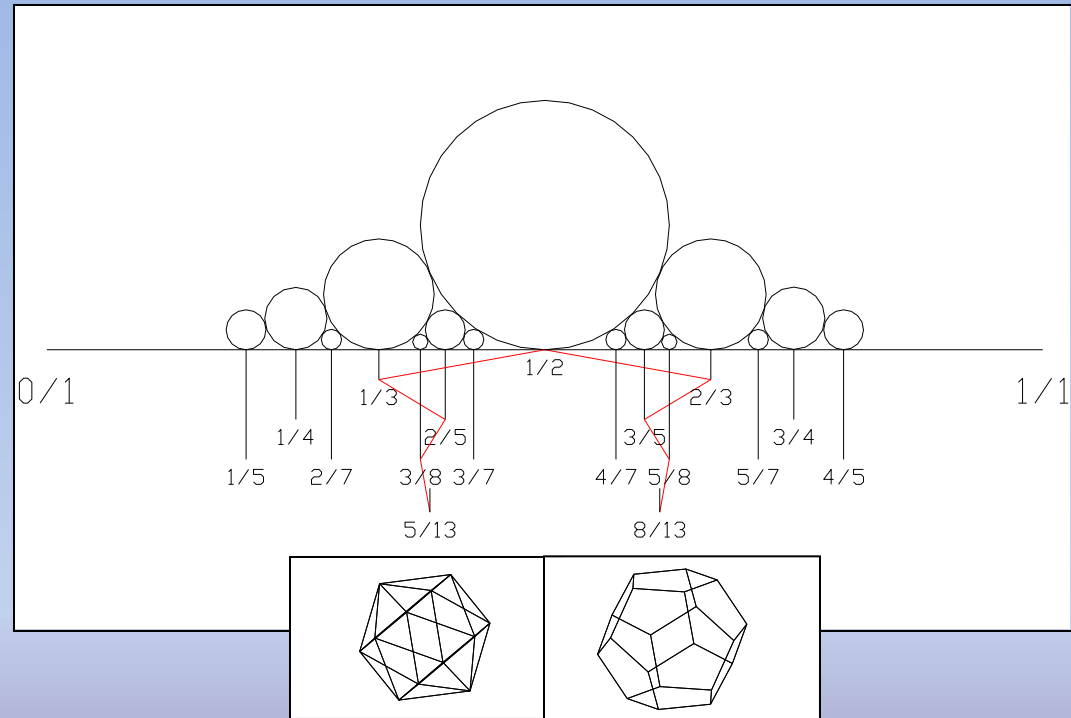
rechts oben Rot eingezeichnete Zickzacklinien markieren die Fibonacci Reihe.

Es gibt in jeder Ferey-Folge zwei Werte, welche der Fibonacci Folge entsprechen. Zwei benachbarte Ferey-Folgen enthalten benachbarte Elemente der Fibonacci-Folge. Das heißt, die Fibonacci-Folge ist Bestandteil der Menge aller Farrey-Folgen.

Im Bild rechts sind alle Brüche als Kreis markiert, bei denen Nenner und Zähler Mitglied der Fibonacci Folge sind, dabei sind die beiden Pfade welche symmetrisch zu $1/2$ angeordnet sind, (rot eingezeichnet) die einzigen Vollständigen Fibonacci-Folgen, die in der Menge aller Farrey-Folgen enthalten sind.

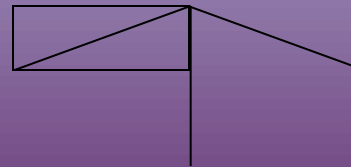
Sie haben die Grenzwerte: g, g^2

Diese sind charakteristisch für den Pentadodekaeder und den Ikosaeder „Wunderbare Ordnung“
($g=0.618033\dots$)

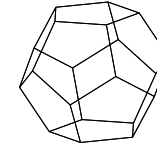


Ikosaeder

Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist $1/g^2$. Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten

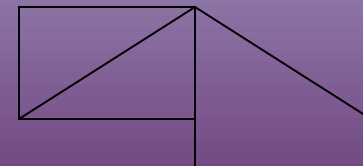


Der Tangens des Neigungswinkels zweier Ikosaederflächen ist $\tan(1/g^2)$. D.h. die Diagonalen eines Rechtecks mit dem Seitenverhältnis 1 zu g^2 haben denselben Winkel.



Pentadodekaeder

Der halbe Neigungswinkel von zwei benachbarten Flächen ist $1/g$. Dies ist einer der beiden Grenzwerte, die in der Menge aller Farrey-Folgen auftreten



Der Tangens des Neigungswinkels zweier Pentadodekaederflächen ist $\tan(1/g)$. D.h. die Diagonalen eines Rechtecks mit dem Seitenverhältnis 1 zu g^2 haben denselben Winkel.

Das Fibonacci Spektrum

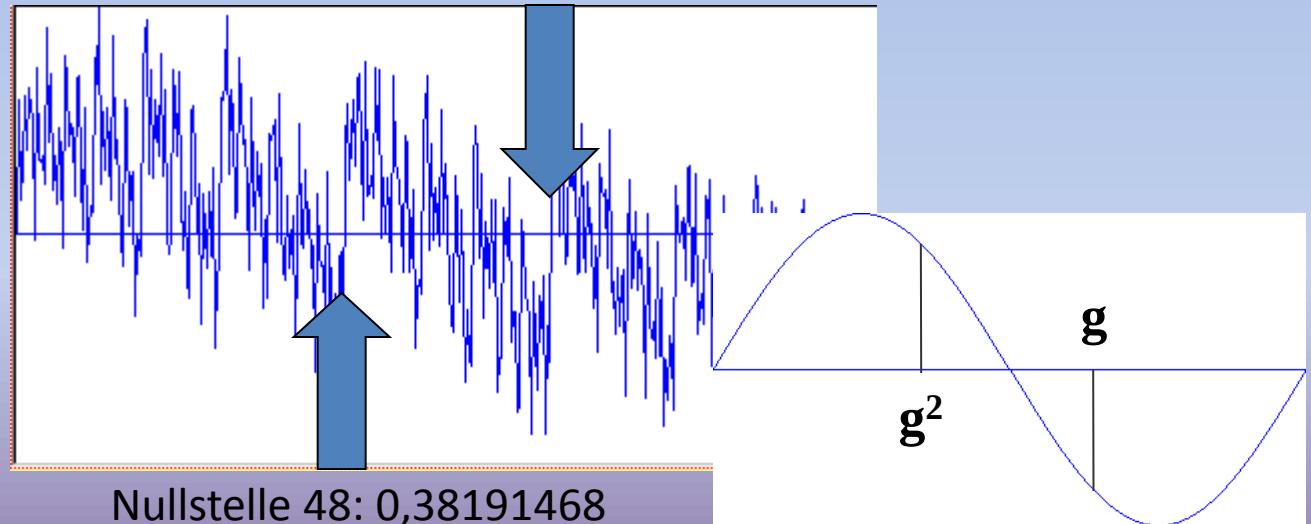
Ein Spektrum bestehend aus den Frequenzen der Fibonacci Reihe

Dargestellt sind die ersten 15 Terme

$$\sin(x) + \sin(x) + \sin(2 \cdot x) + \sin(3 \cdot x) + \sin(5 \cdot x) + \sin(8 \cdot x) + \dots + \sin(987 \cdot x)$$

Je größer die Anzahl der Terme um so mehr nähern sich die markanten Nullstellen
den Werten g und g^2

Nullstelle 86: 0,61808532

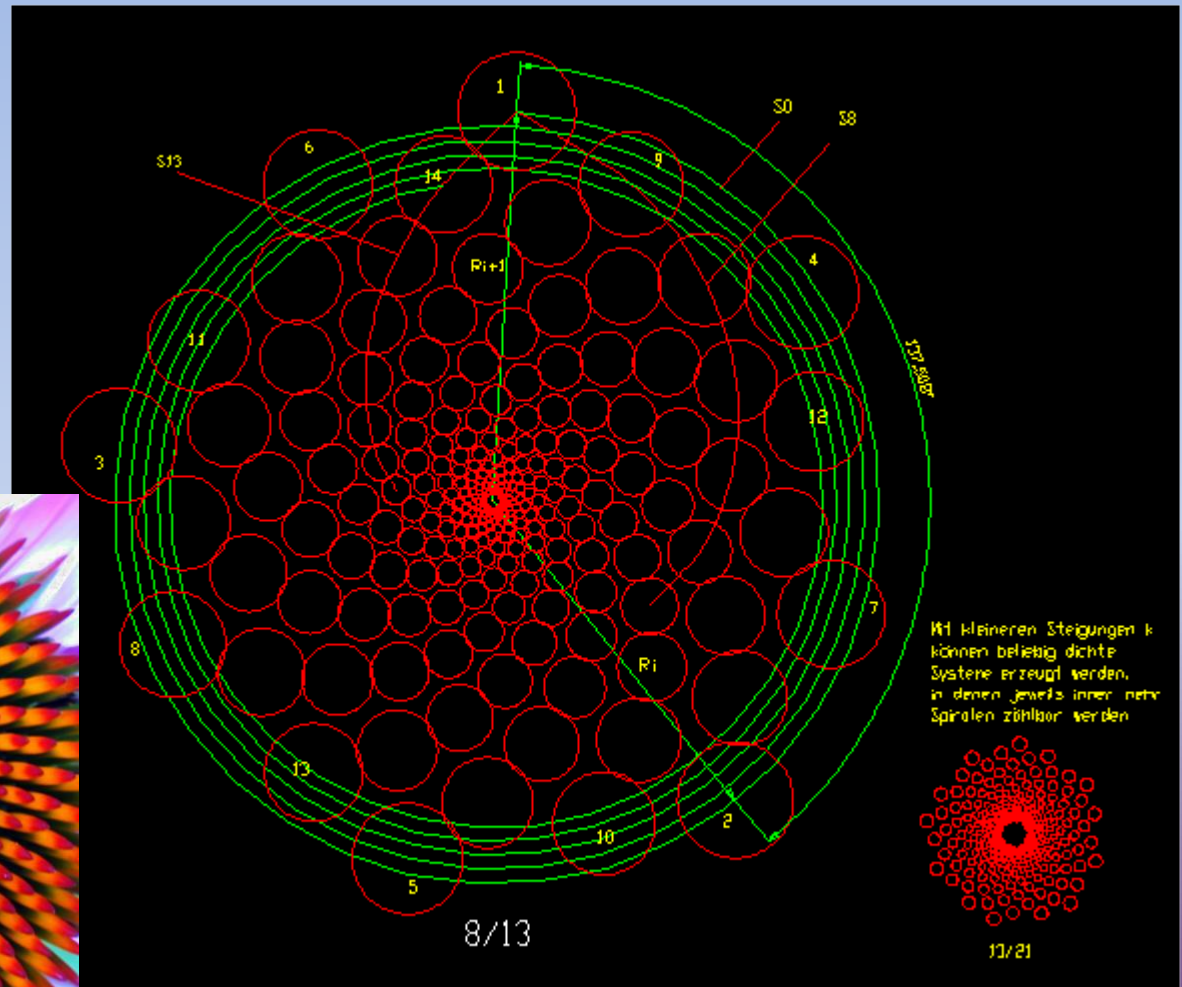
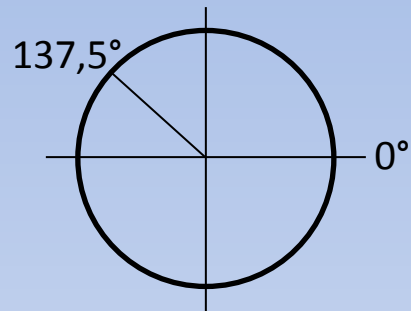


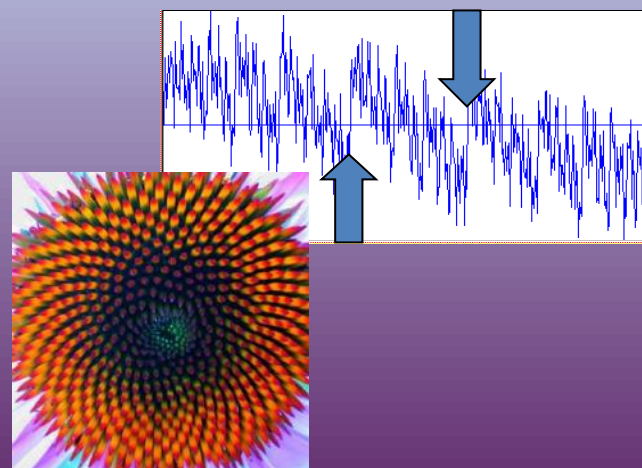
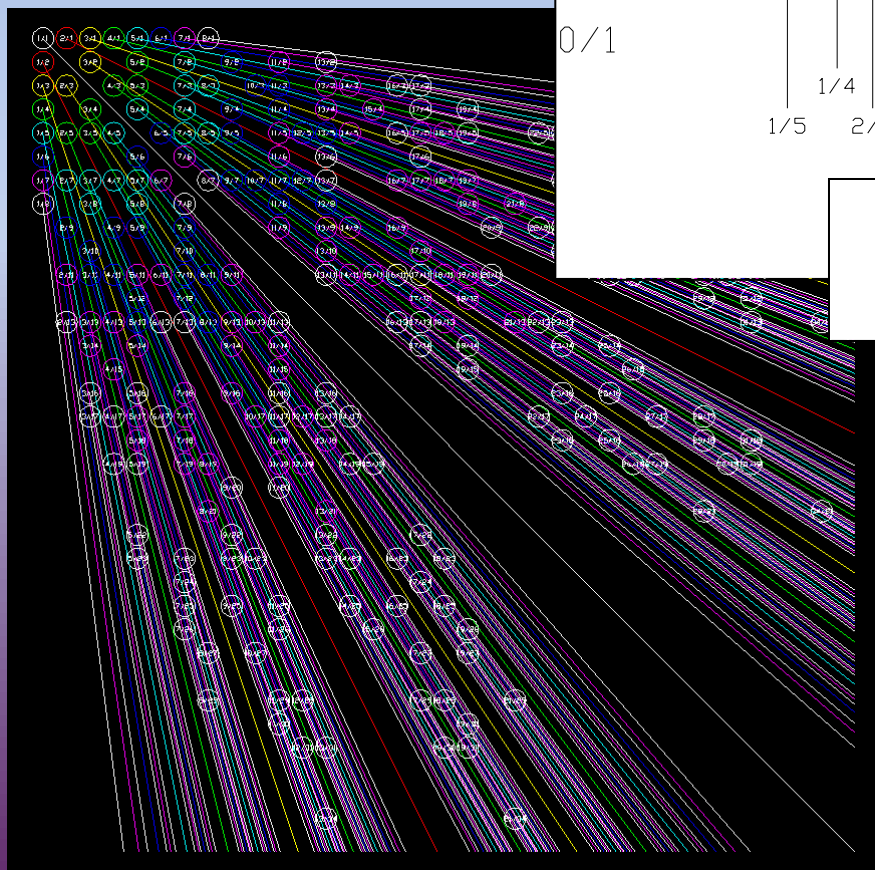
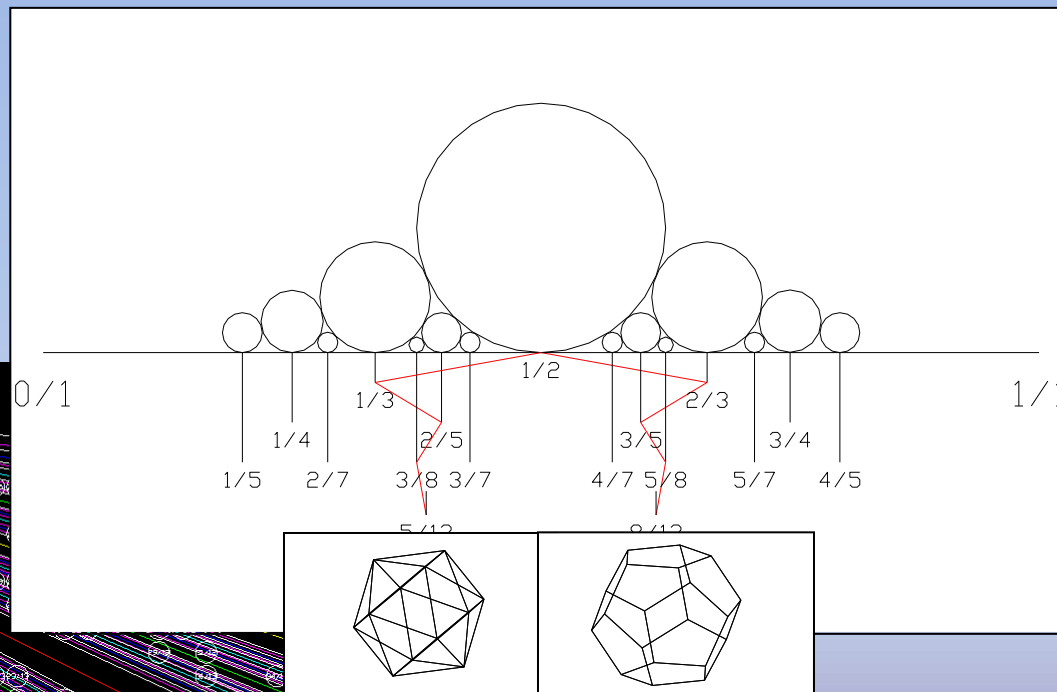
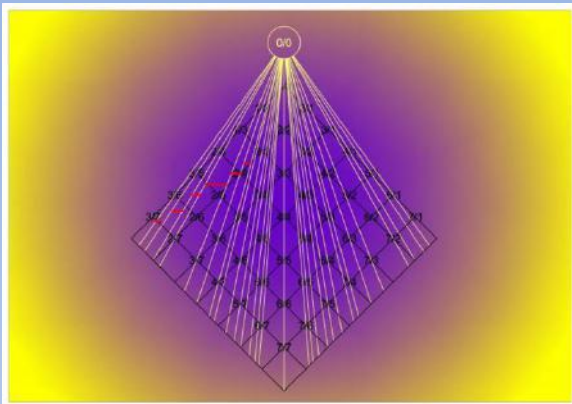
Die exakten Werte

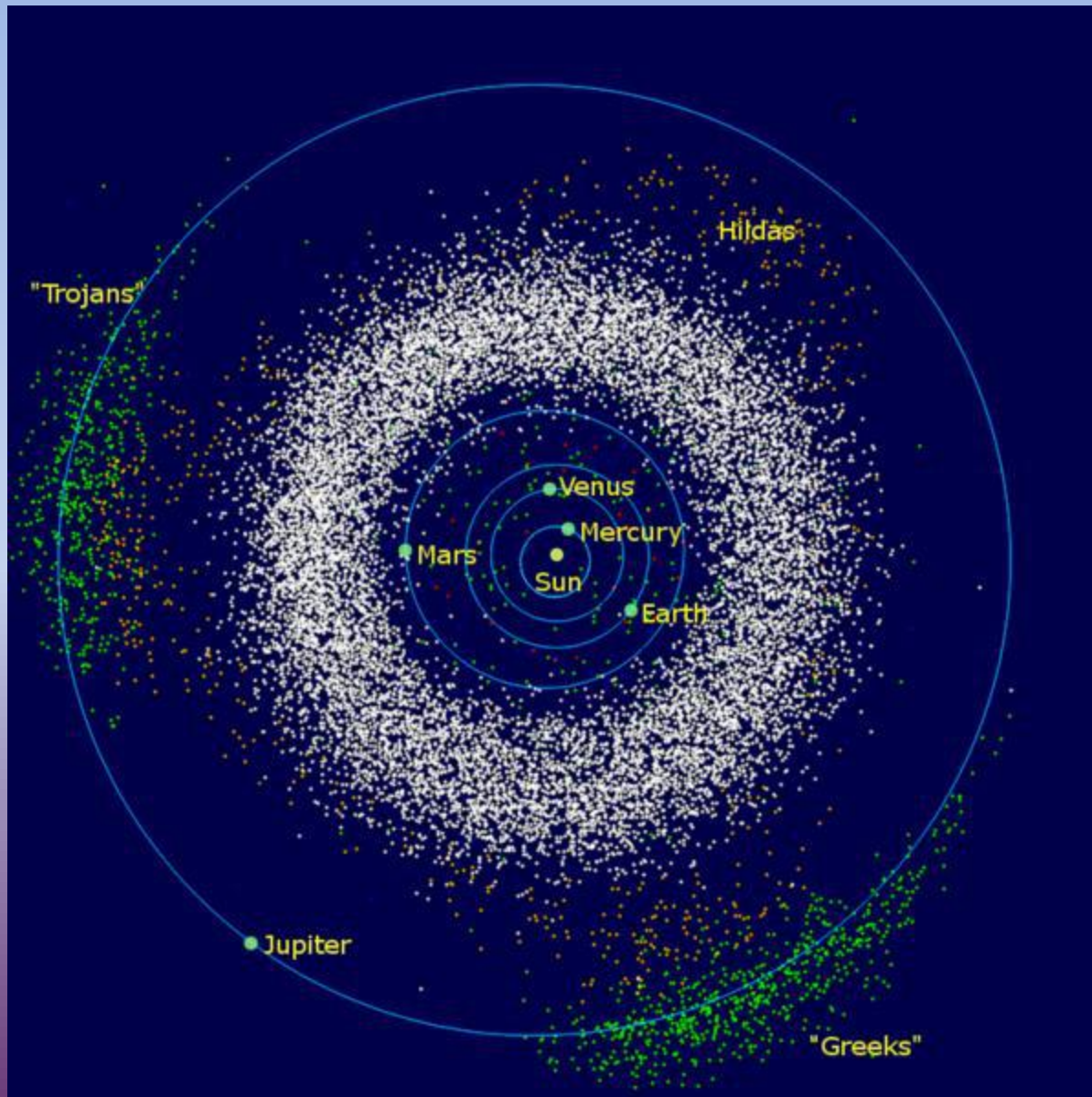
$$g^2 = 0,3819660\dots$$

$$g = 0,6180339\dots$$

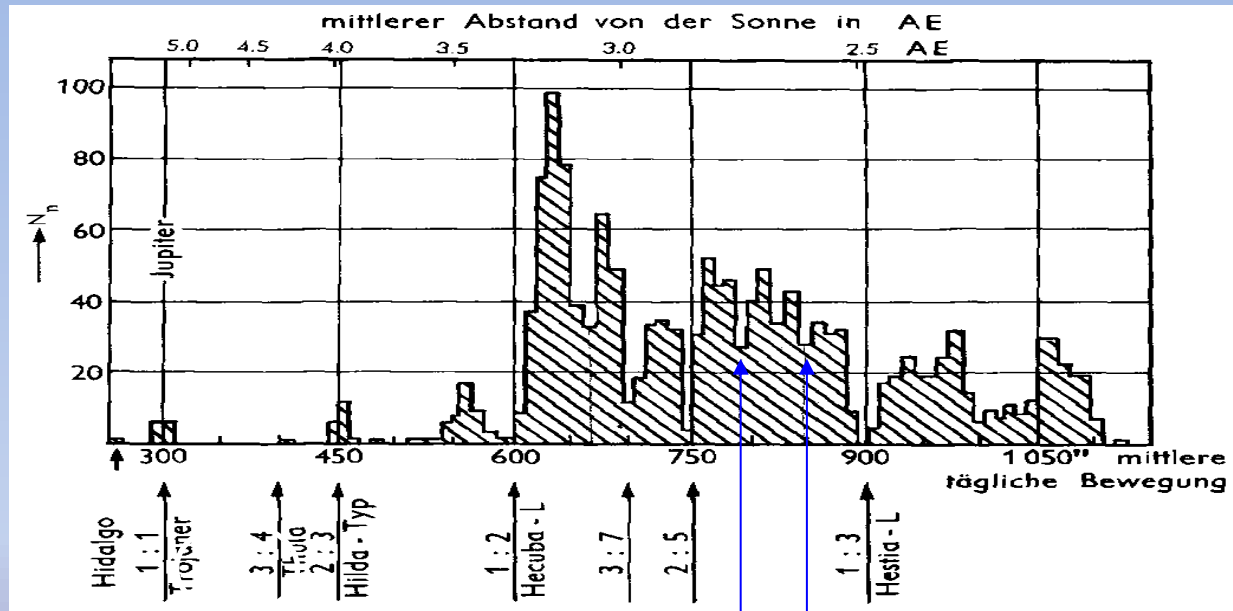
$$\begin{aligned}
 g * 360 &= 222,5^\circ \\
 g^2 * 360 &= 137,5^\circ \\
 \text{Summe} &= 360^\circ
 \end{aligned}$$







Die Farreyfolge und die Planeoiden



1/0

0/1

1/1

1:2

2:3

1:3

3/4

2/5

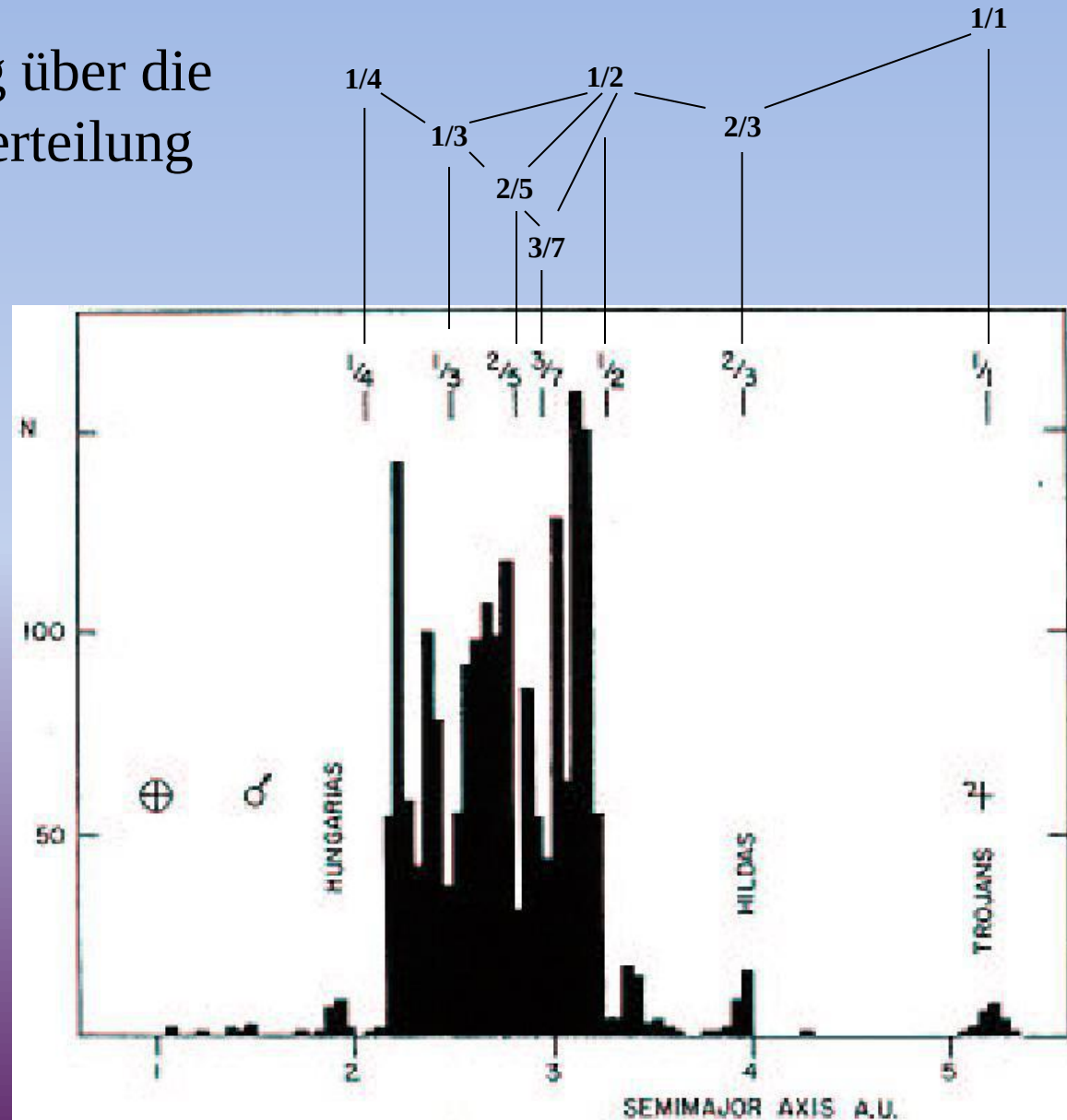
3/7

3/8

5/13

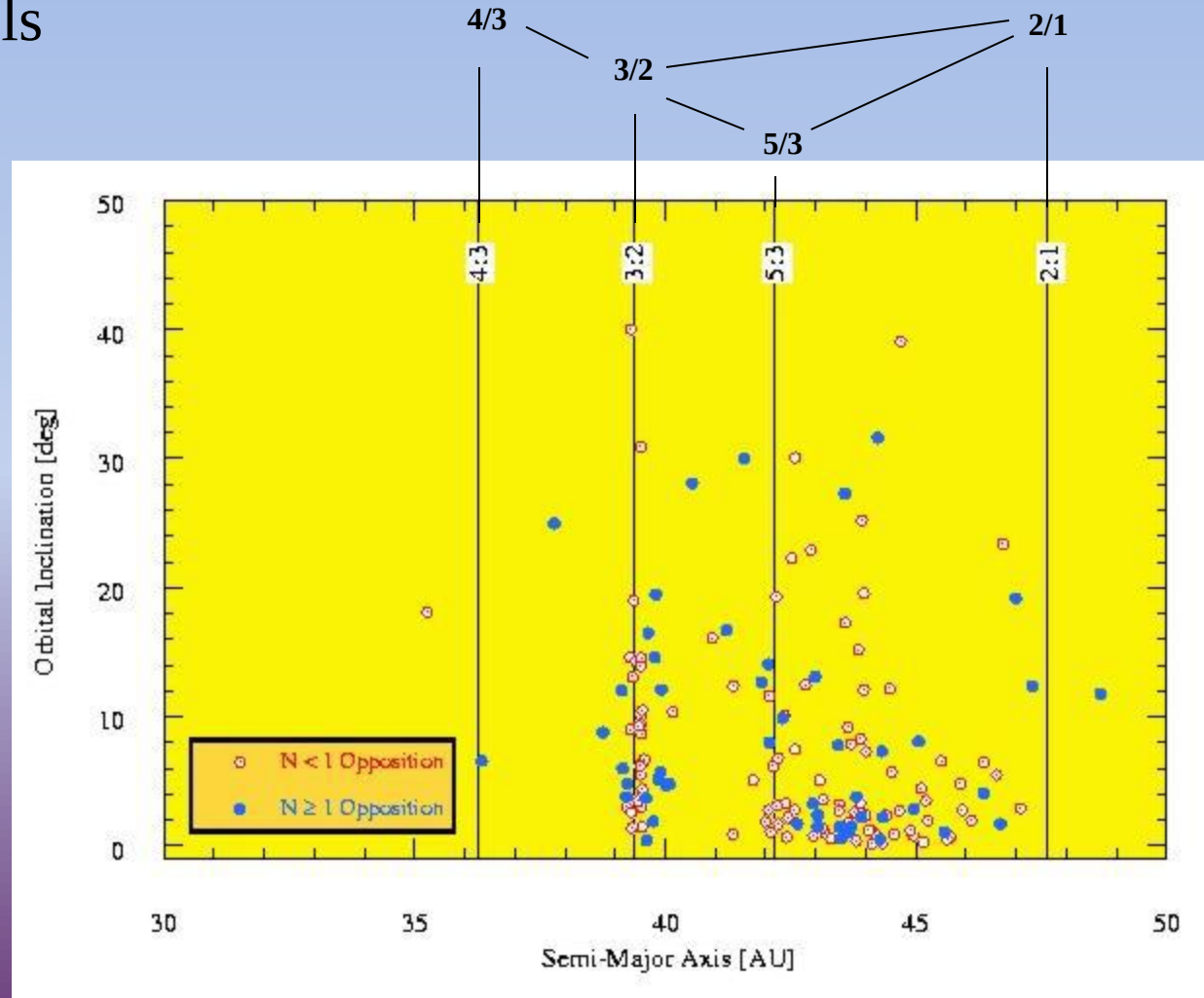
Eine weitere Untersuchung über die Planetoidenverteilung

Die bezeichneten Lücken in der Verteilung der Planetoiden zwischen Mars und Jupiter lassen sich durch Addition von Zähler und Nenner ableiten. Es handelt sich also auch hier um die Glieder der ersten Farreysolgen. Wie bei der vorigen Grafik, sieht man auch hier, dass die Jupiternahen Bereiche durch Frequenzkoppelung (Frequency Locking) in ihren Bahnen gehalten werden. Vermutlich handelt es sich bei den Restbeständen in den äußeren Lücken um massereiche Objekte, wodurch ein stärkerer Koppelungseffekt zur Koppelung führt.



Untersuchung des Kuipergürtels

Der Kuipergürtel befindet sich außerhalb der Neptunbahn und besteht ebenfalls aus zahllosen Kleinplaneten. Auch hier konnten Anhäufungen entdeckt werden, die sich ebenfalls durch Addition von Zähler und Nenner in einfachen rationalen Verhältnissen zur Neptunbahn sammeln.

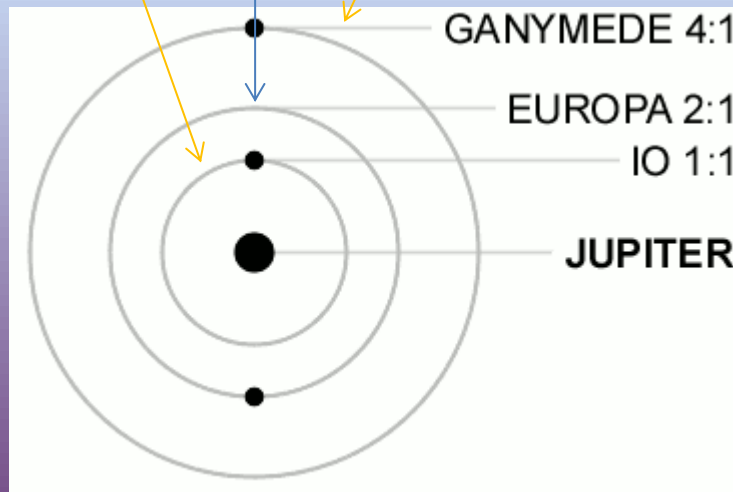




Bei einer Laplace-Resonanz stehen die Umlaufzeiten *dreier oder mehrerer* Himmelskörper in einem niedrigen ganzzahligen Verhältnis. Einziges bisher entdecktes Beispiel sind die Jupitermonde Io, Europa, Ganymede.

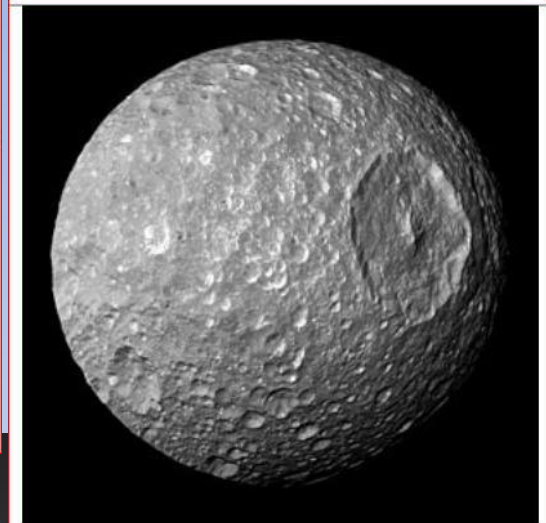
Quelle:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Bahnresonanz>

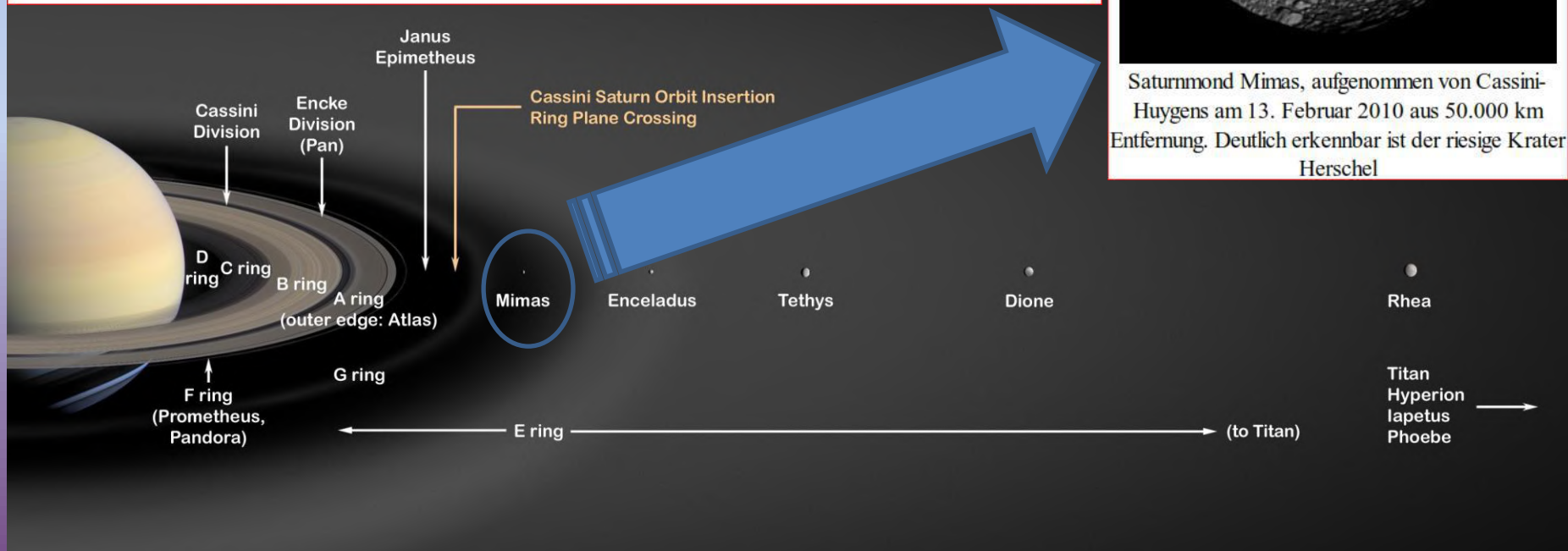


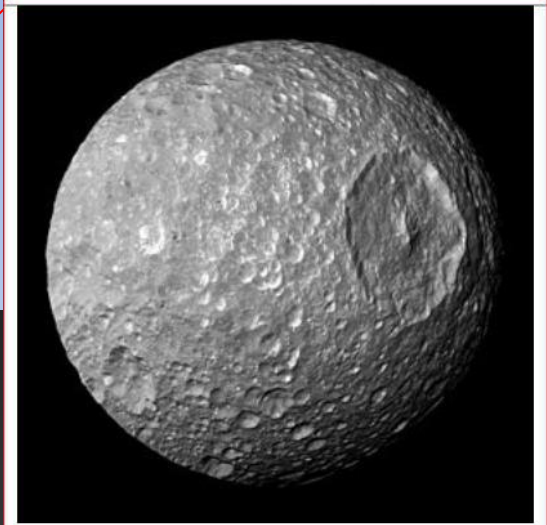
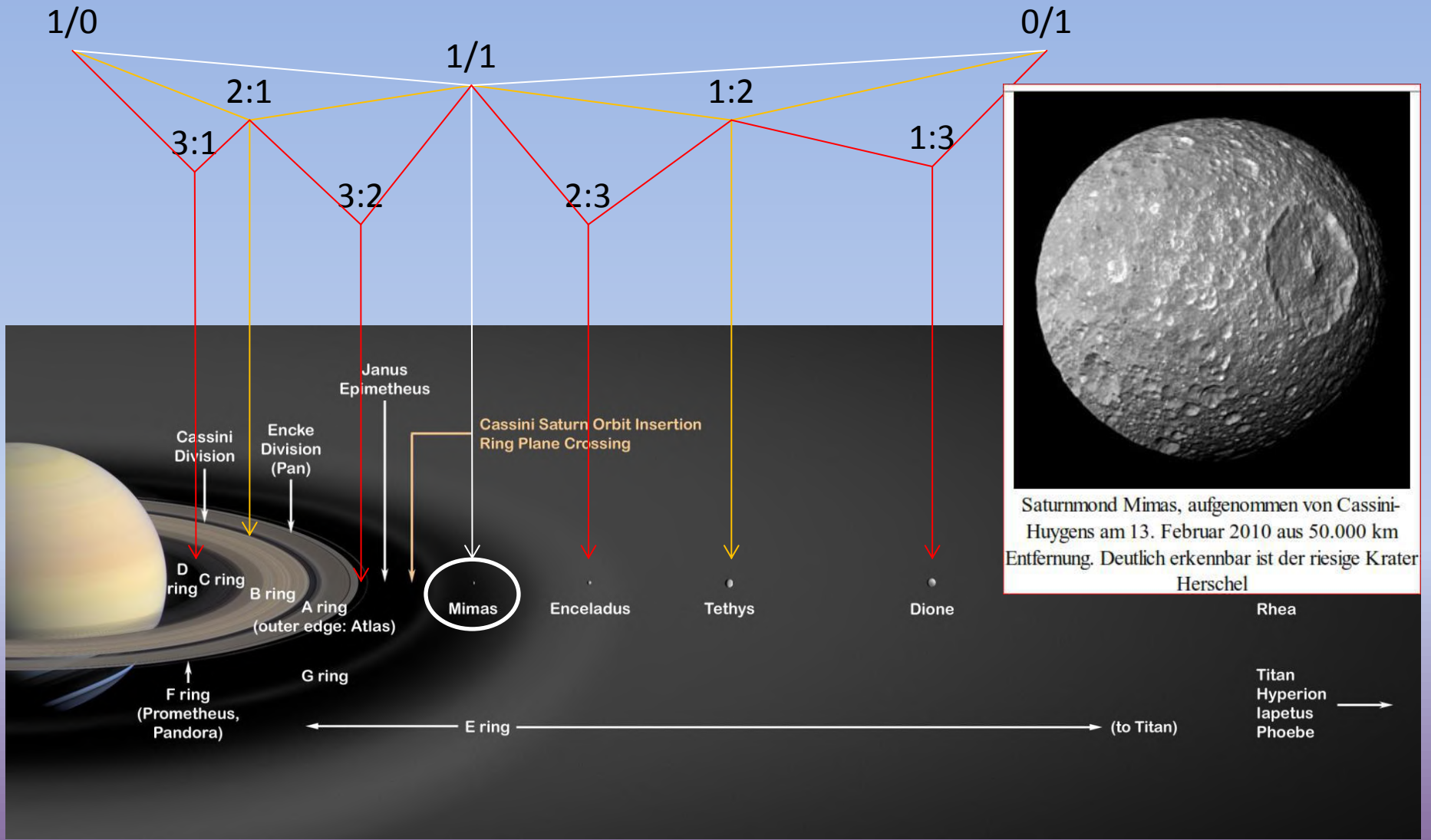
Mimas hat durch eine Reihe verschiedener Bahnresonanzen einen erheblichen Einfluss auf seine Nachbarschaft. Er ist durch seine Schwerkraft dafür verantwortlich, dass die 4.800 km breite Cassinische Teilung, die den A-Ring vom B-Ring trennt, weitgehend frei von Ringmaterial bleibt. Mimas besitzt offensichtlich genug Masse, um die Teilung leer zu halten, obschon bei naher Betrachtung immer noch kleine Teilchen vorhanden sind, die die Cassinische Teilung also nur aus der Ferne dunkel und leer erscheint. Die Teilchen in der *Huygens-Lücke* innerhalb der Teilung weisen eine 2:1-Bahnresonanz mit Mimas auf. Sie werden wiederholt von Mimas in immer der gleichen Richtung angezogen, wodurch sie auf eine äußere Bahn geraten. Die Grenze zwischen dem B- und C-Ring befindet sich in einer 3:1-Resonanz mit Mimas.

Der Mond befindet sich zudem in einer 2:3-Resonanz mit dem F-Ring-Schäfermond Pandora sowie einer 7:6-Bahnresonanz mit seinem inneren Nachbarn Aegaeon und dem G-Ring – dessen innere Ringkante sich etwa 15.000 km innerhalb der Umlaufbahn von Mimas erstreckt – wobei Mimas eine Pendelbewegung von Aegaeons Großer Bahnhalbachse verursacht, die während einer geschätzten Periode von 4 Jahren etwa vier Kilometern abweicht.



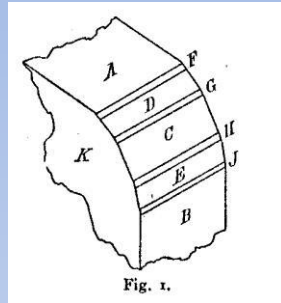
Saturnmond Mimas, aufgenommen von Cassini-Huygens am 13. Februar 2010 aus 50.000 km Entfernung. Deutlich erkennbar ist der riesige Krater Herschel



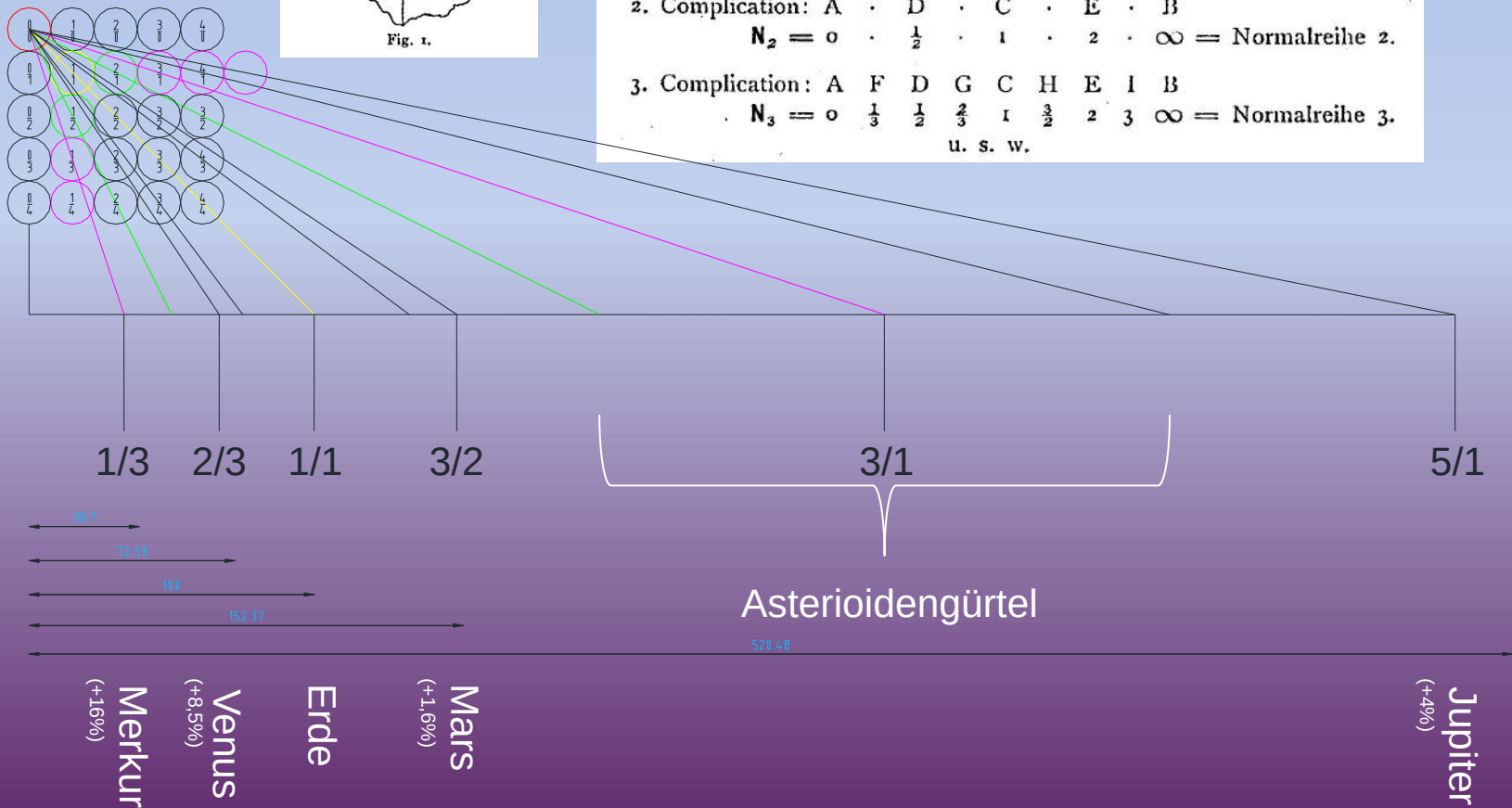


Saturnmond Mimas, aufgenommen von Cassini-Huygens am 13. Februar 2010 aus 50.000 km Entfernung. Deutlich erkennbar ist der riesige Krater Herschel

Victor Goldschmidt



Primärflächen:	A	.	.	.	.	.	.	.	B
$N_0 = 0$	.	.	.	.	.	.	.	.	∞ = Normalreihe 0.
1. Complication:	A	.	.	.	C	.	.	.	B
$N_1 = 0$	.	.	.	.	1	.	.	.	∞ = Normalreihe 1.
2. Complication:	A	.	D	.	C	.	E	.	B
$N_2 = 0$	.	.	$\frac{1}{2}$	.	1	.	2	.	∞ = Normalreihe 2.
3. Complication:	A	F	D	G	C	H	E	I	B
$N_3 = 0$	.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞ = Normalreihe 3.
									u. s. w.



0/1

1/5

1/4

1/3

1/2

2/3

3/4

4/5

1/1

 g
 0,618...

 $g^2=1/(g+2)$
 0,381...

 $1/(g^2+2)$
 $1/(g+3)$
 $1/(g^2+3)$
 $1/(g+4)$
 $1/(g^2+4)$
 $1/(g+5)$
 $1/(g^2+5)$

Das Dodekaeder verbindet Platon mit der
 quinta essentia, dem Himmelsäther.

Jeder
 der zwölf Seitenflächen entspricht eines
 der zwölf Sternbilder
 (Timaios 55c)

