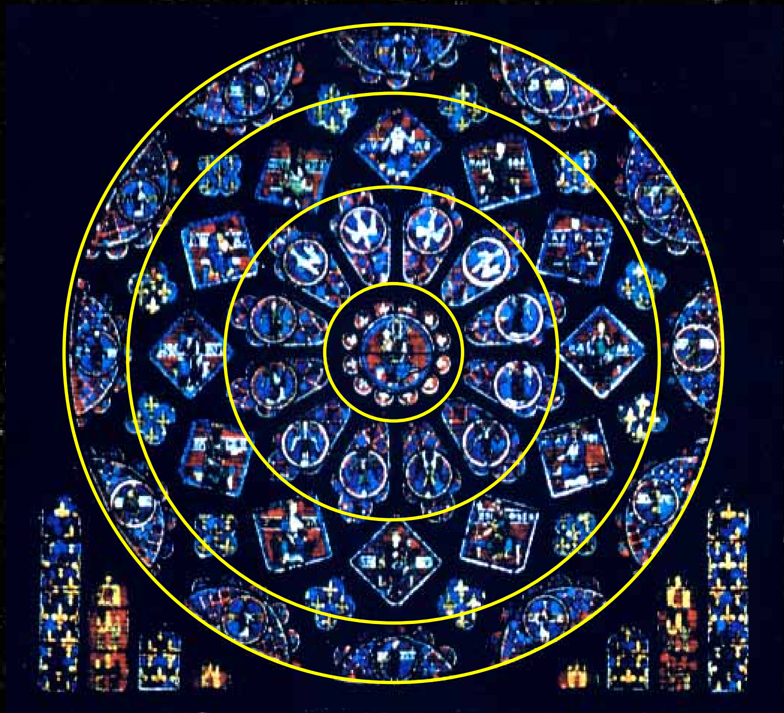
Harmonik in der Geometrie



Vortrag Hartmut Warm
auf dem Harmonik-Symposion 2014 „Harmonik in Natur und Kultur“, Nürnberg, 17. - 18. Mai

Diese Präsentation ist urheberrechtlich geschützt.

In privatem Rahmen darf die Präsentation gerne unter Nennung der Quelle und der Internetadresse *www.keplerstern.de* gezeigt oder weiter gegeben werden. Die Verbreitung der hier vorgestellten Phänomene liegt selbstverständlich auch im Interesse des Verfasser.

Sämtliche kommerzielle Nutzungen, auch von Auszügen, sind jedoch nur mit vorheriger schriftlicher Genehmigung des Verfassers gestattet.

© Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

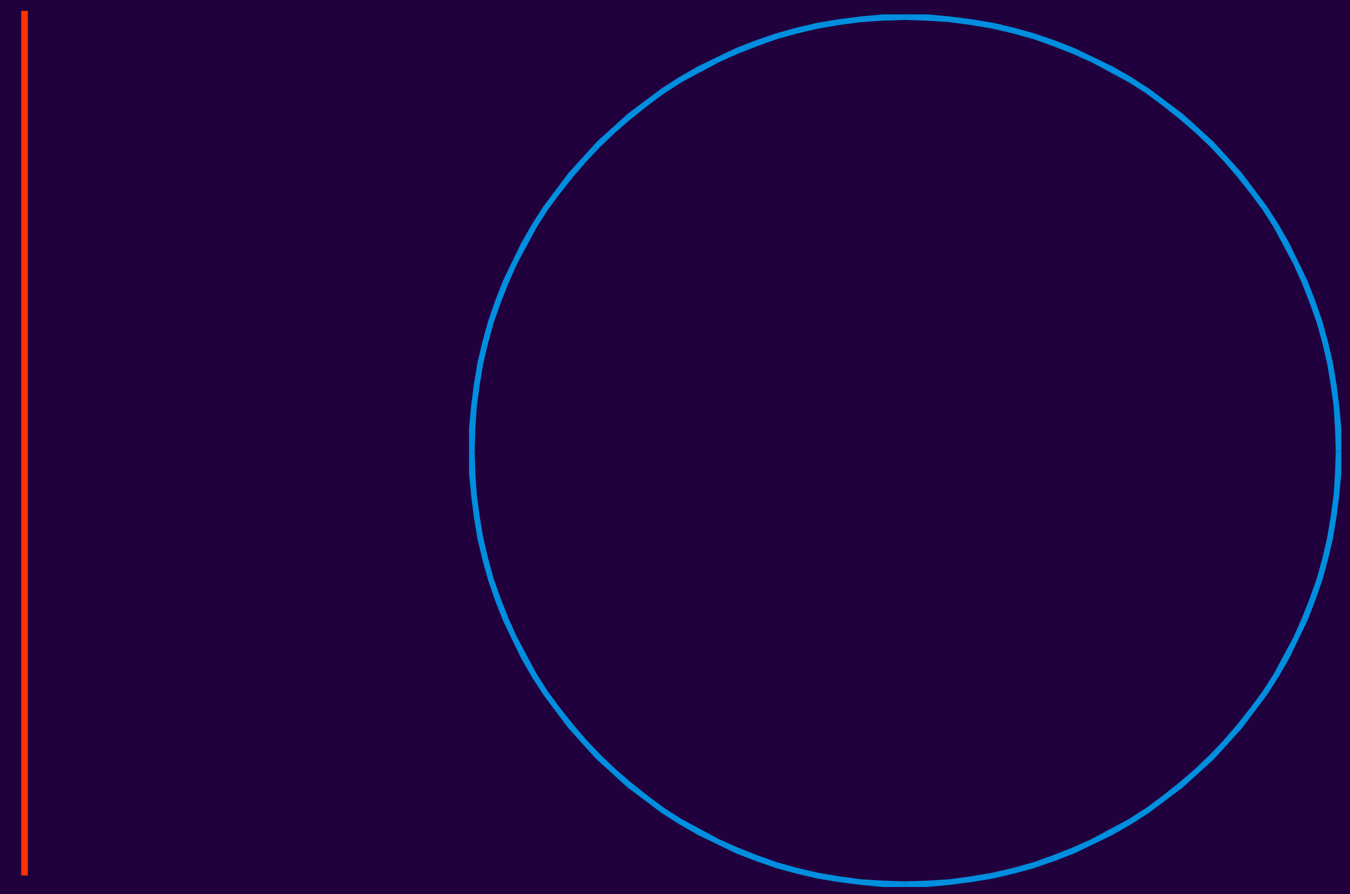
Frage vorweg:

Gehört die Geometrie ins Reich der Natur oder der Kultur?

(bitte selbst einmal darüber nachdenken)

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Grundelemente der Geometrie



linear

zyklisch

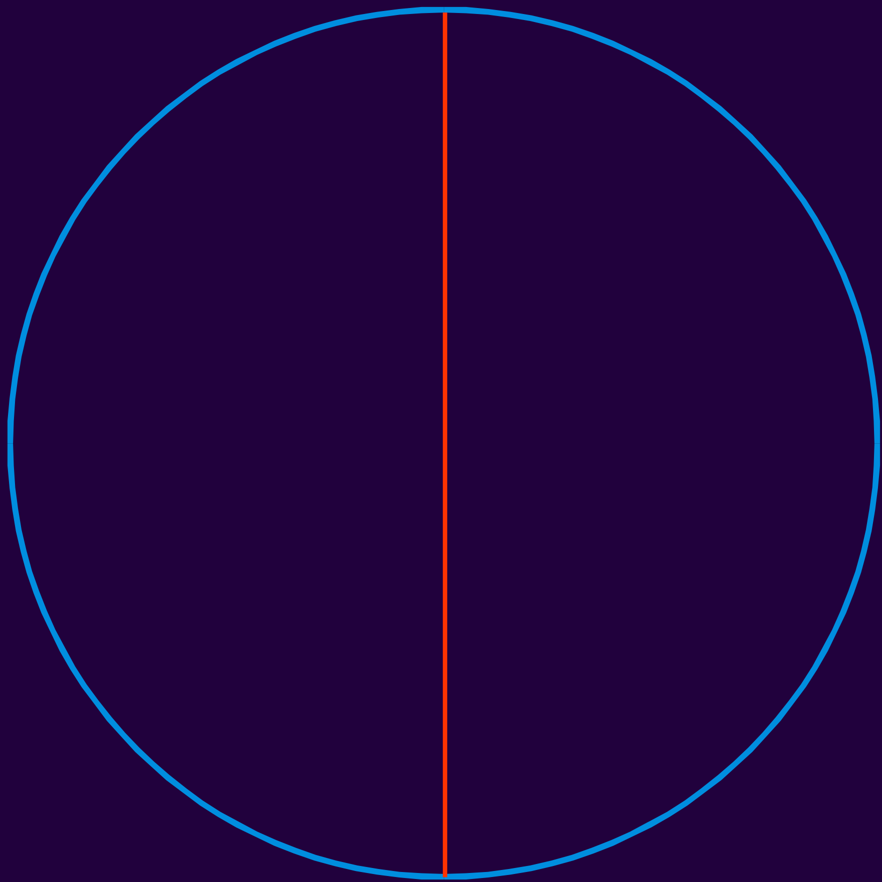
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Das Gegensätzliche strebt zur Vereinigung, aus dem Unterschiedlichen entsteht die schönste Harmonie, und der Streit (der Kampf) läßt alles so entstehen.

Heraklit

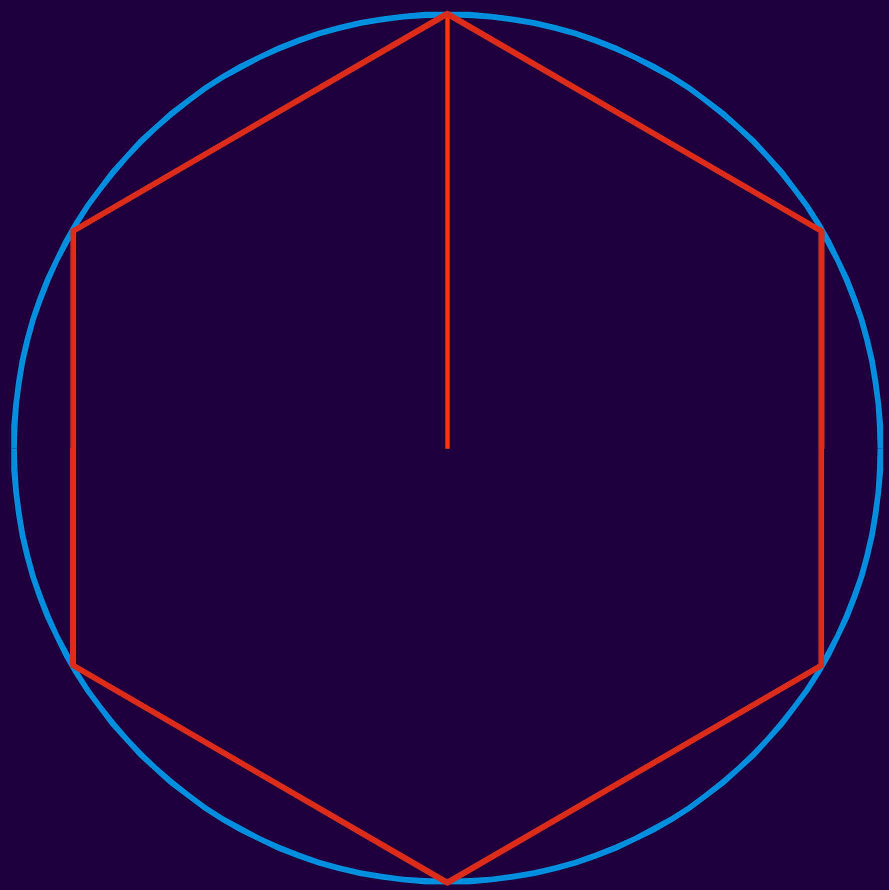
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Der Durchmesser



Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Der Radius

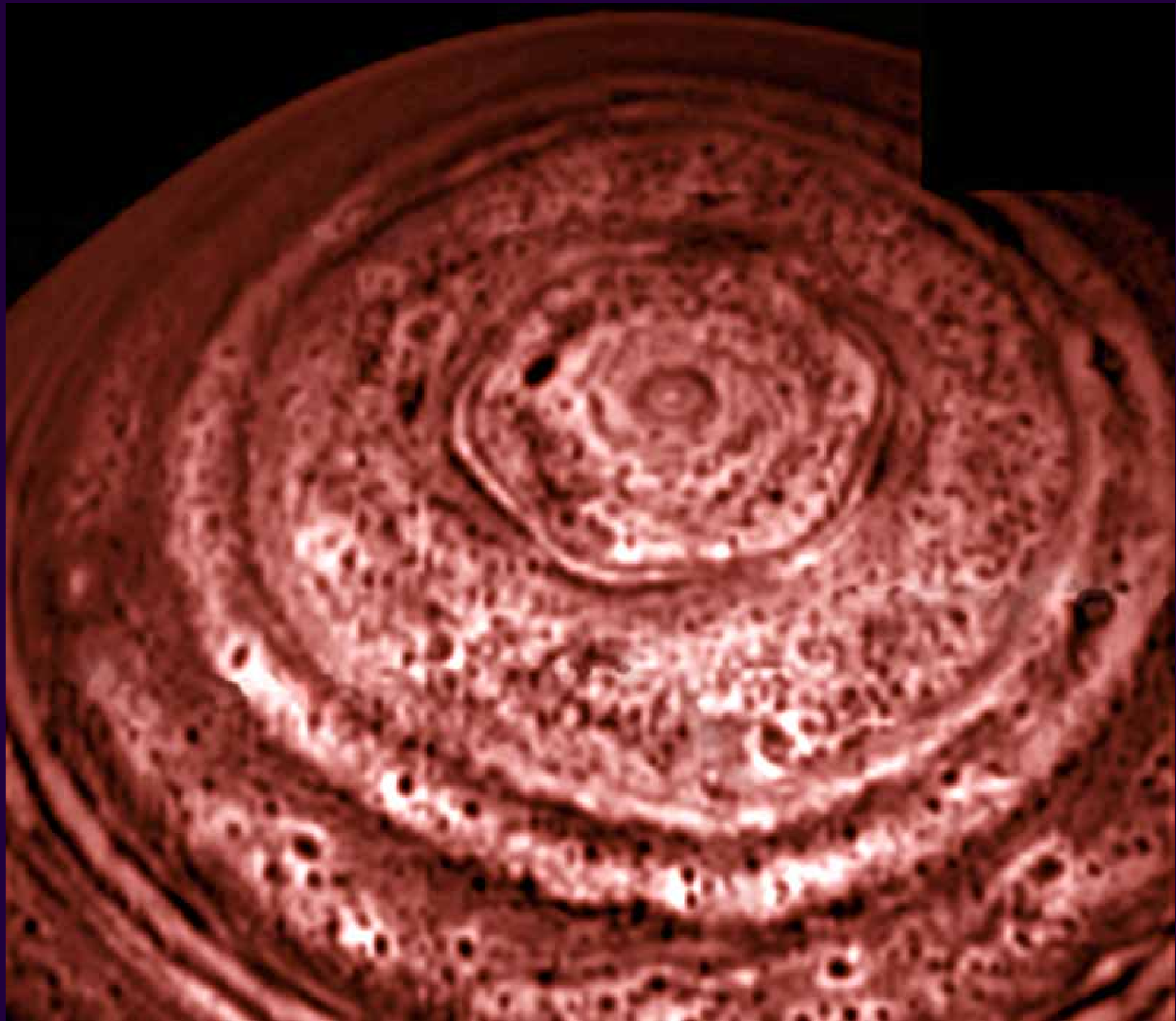


Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Der Radius läßt sich exakt sechsmal auf dem Kreis abtragen, ein kleines geometrisches Wunder (falls man noch staunen kann).

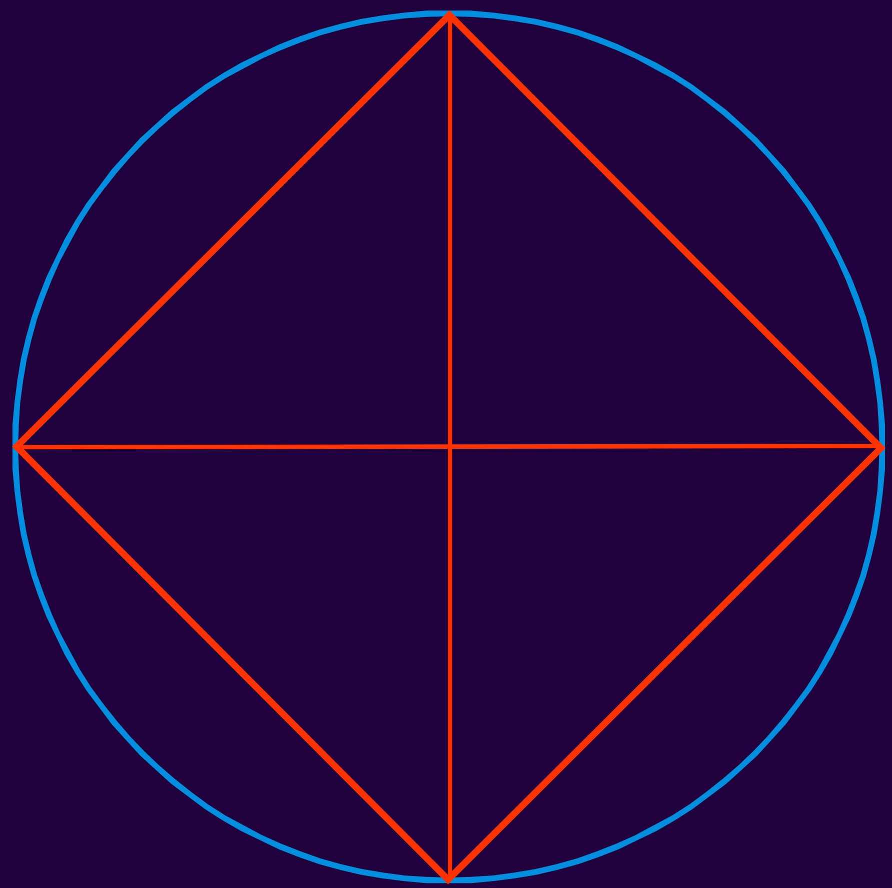
Auch der Kosmos zeigt uns das Sechseck:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

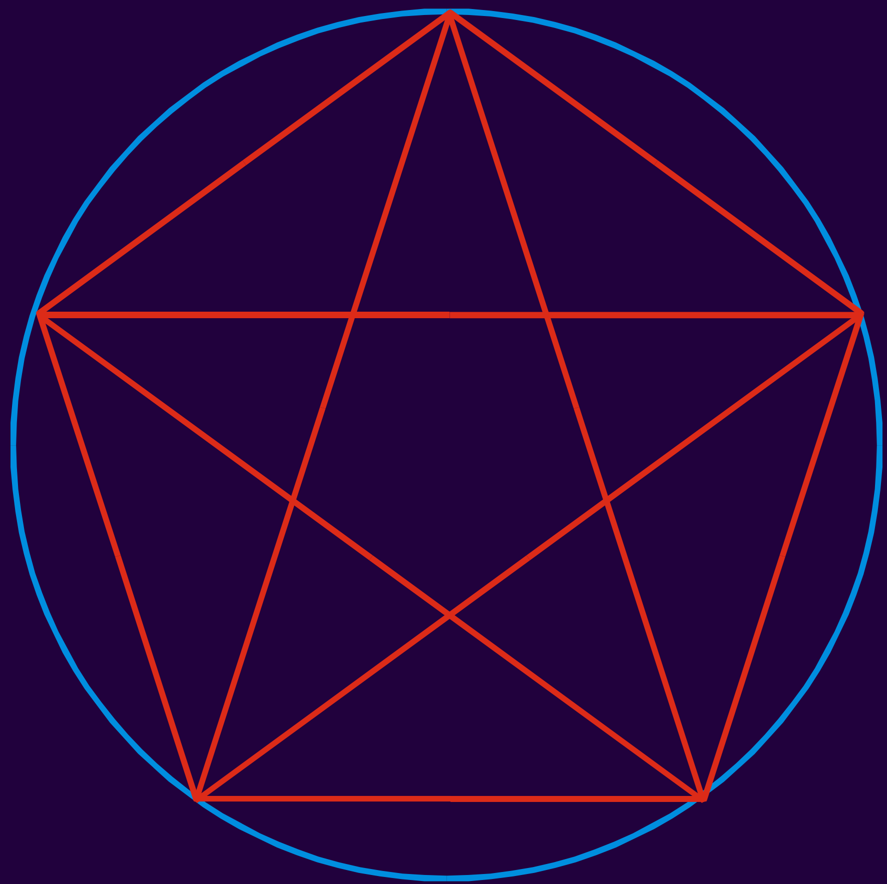


A bizarre six-sided feature encircling the north pole of Saturn near 78 degrees north latitude has been spied by the visual and infrared mapping spectrometer on NASA's Cassini spacecraft.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

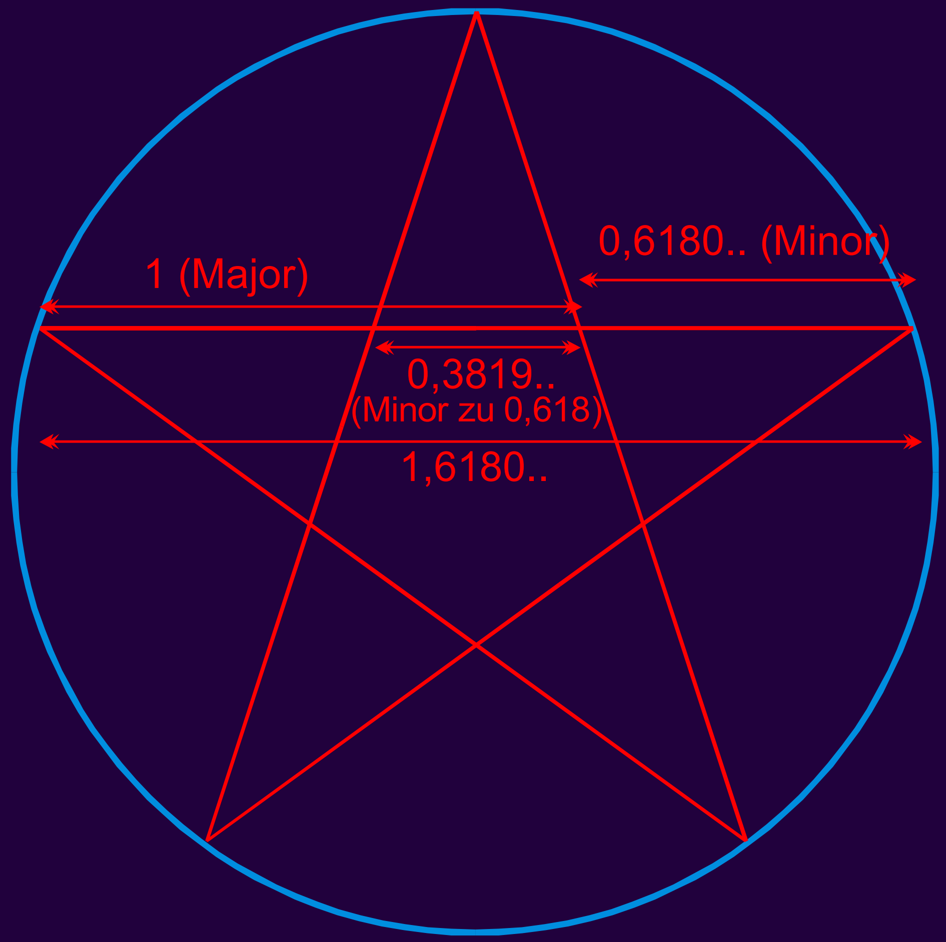


Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

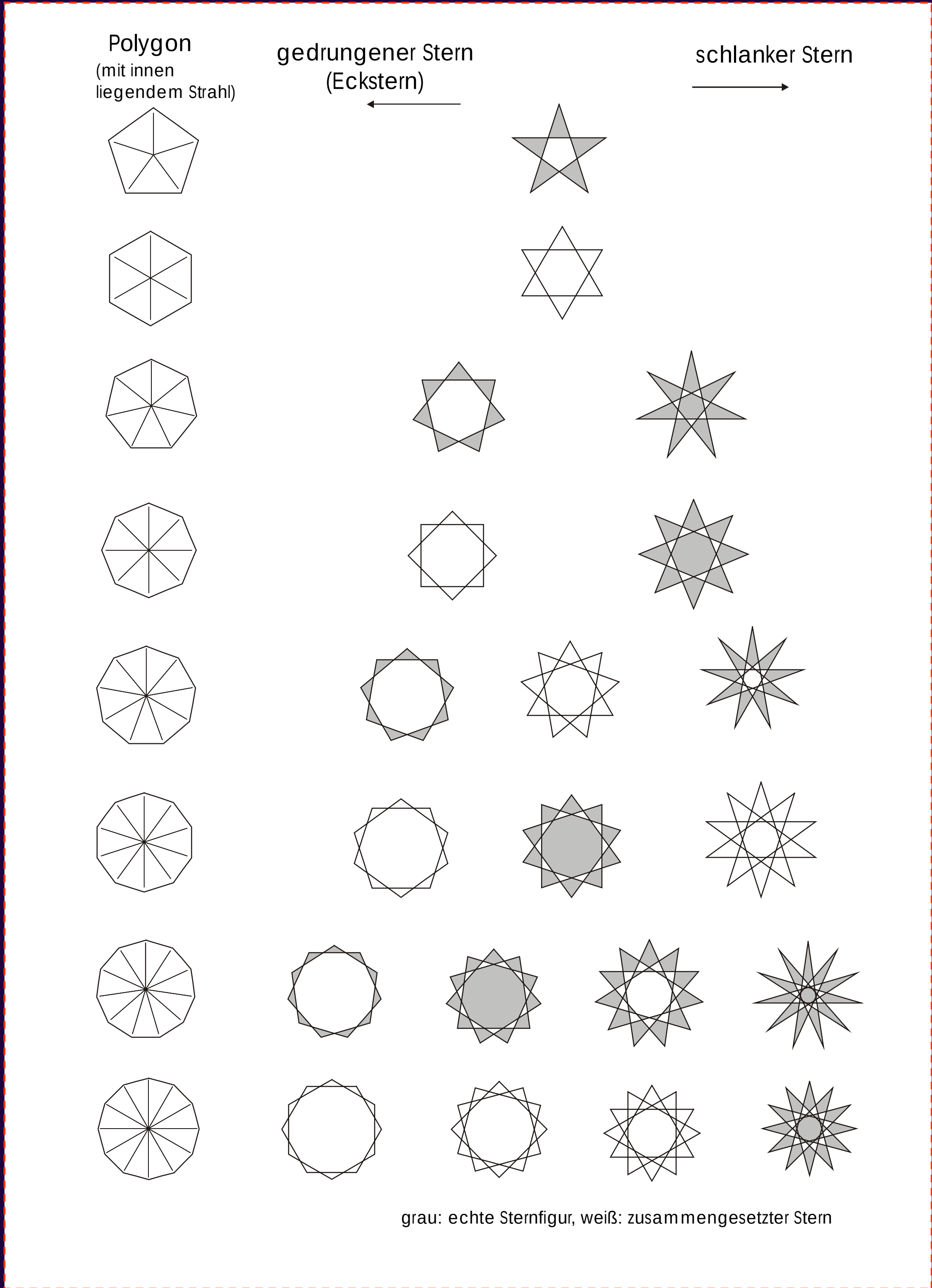


Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Der Goldene Schnitt



Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



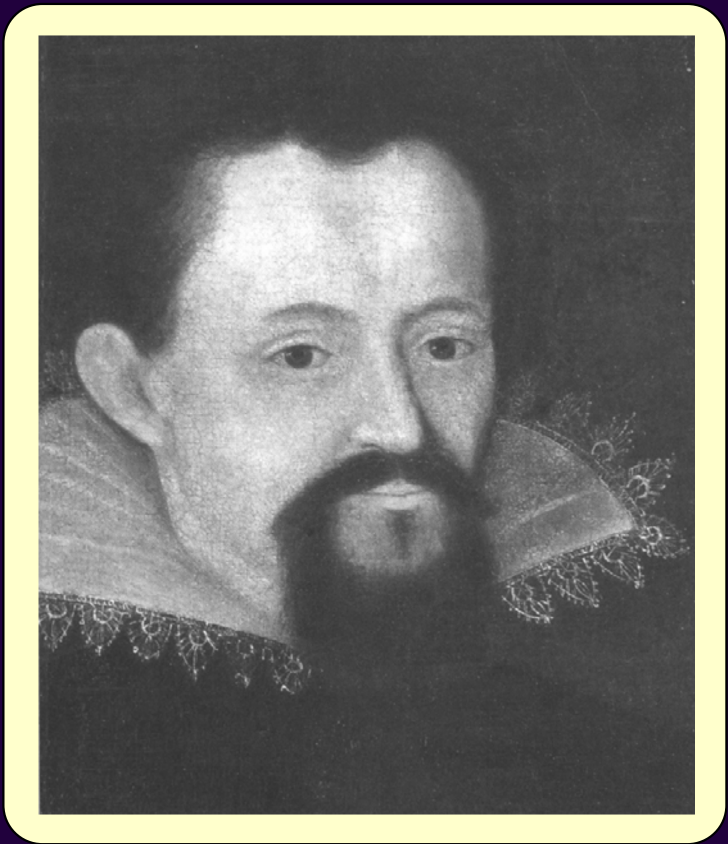
Die Eck- und Sternfiguren bis zur Zahl 12

…n, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Kommen wir nun zu Johannes Kepler und seiner Suche nach dem Gemeinsamen in Musik, Geometrie und Kosmos

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Weltharmonik (1619)



Johannes Kepler (1571-1630)
Fondation St. Thomas, Straßburg

- Geometrie
- Musik
- Astronomie
- Urbilder in der Seele

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Kepler fand dies Gemeinsame in dem, was er Archetypen nannte, geometrische Urbilder, die der Schöpfung zugrunde liegen und die auch in der menschlichen Seele verankert sind.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

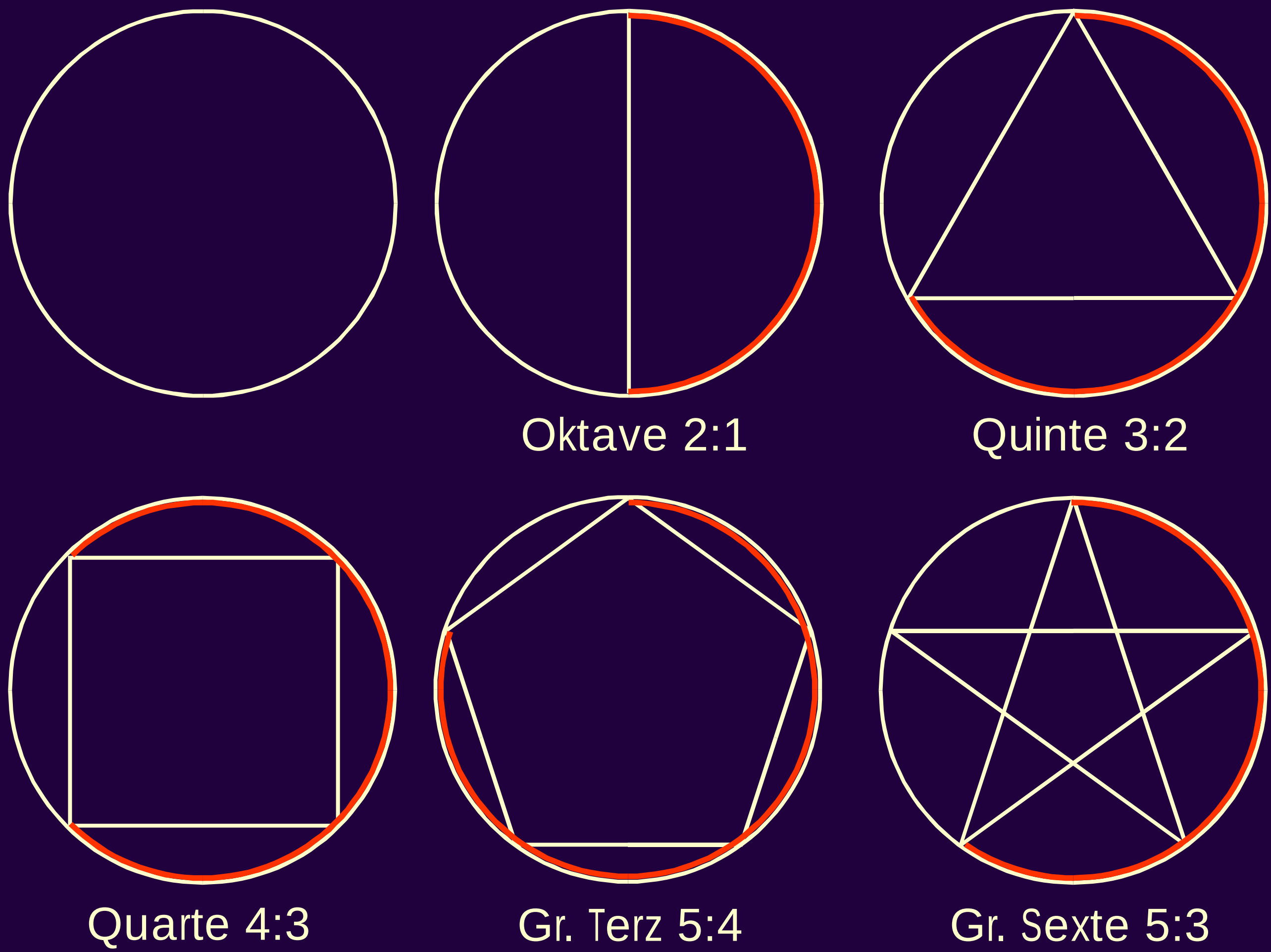
Grundlage war auch dafür die Entdeckung des Pythagoras, daß musikalische Intervalle, die als wohlklingend (oder harmonisch) empfunden werden, einfachen Zahlenverhältnissen entsprechen.

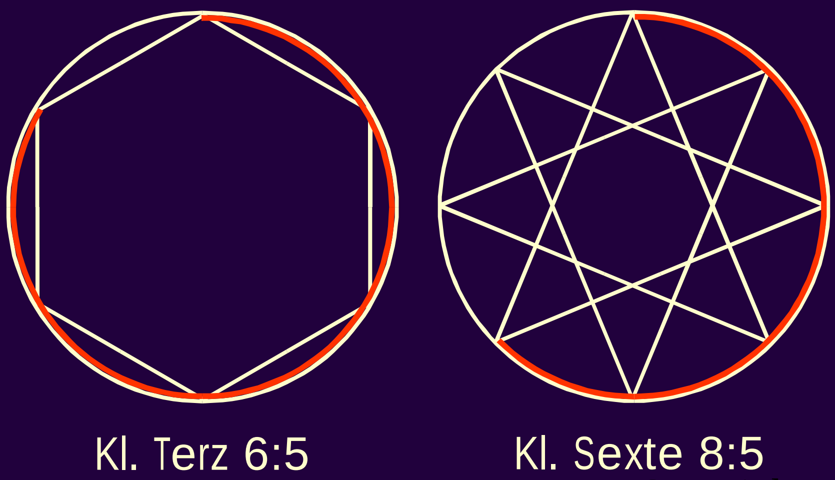
Diese Intervalle können z.B. auf schwingenden Saiten gespielt werden.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Kepler bog die schwingenden Saiten
(in Gedanken) zum Kreis.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de





Die geometrischen Urbilder der konsonanten Intervalle nach Johannes Kepler

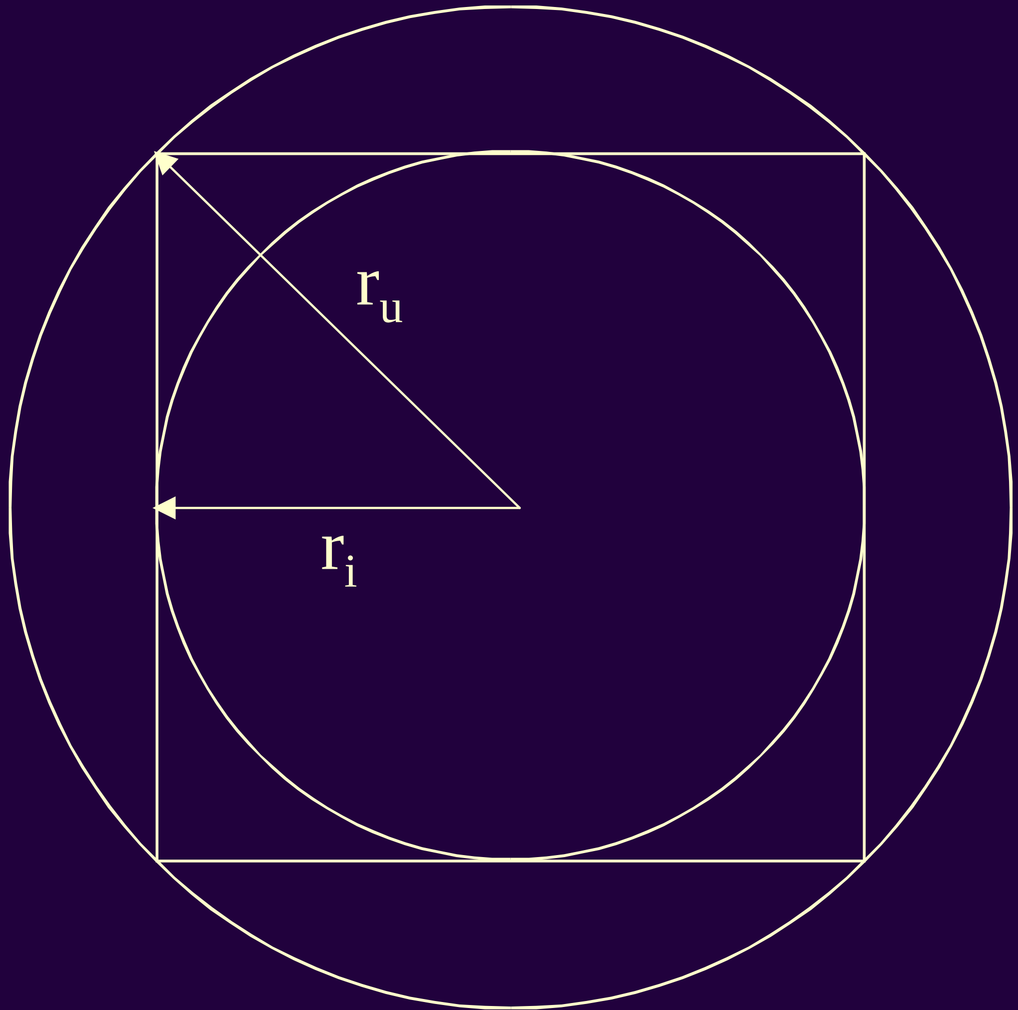
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Hartmut Warm fand, daß sich diese harmonischen Verhältnisse auch in den Flächenverhältnissen der einfachen Eck- und Sternfiguren wiederfinden.

Ein erstes Beispiel ist das Quadrat mit eingeschriebenem Inkreis und umschriebenen Umkreis:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Ermittlung des Verhältnisses der Flächen (F), ausgehend vom Satz des Pythagoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$r_u^2 = r_i^2 + r_i^2$$

$$r_u^2 = 2\,r_i^2$$

$$\sqrt{r_u^2} = \sqrt{2\,r_i^2}$$

$$r_u = \sqrt{2}\;r_i$$

$$\frac{r_u}{r_i} = \sqrt{2}$$

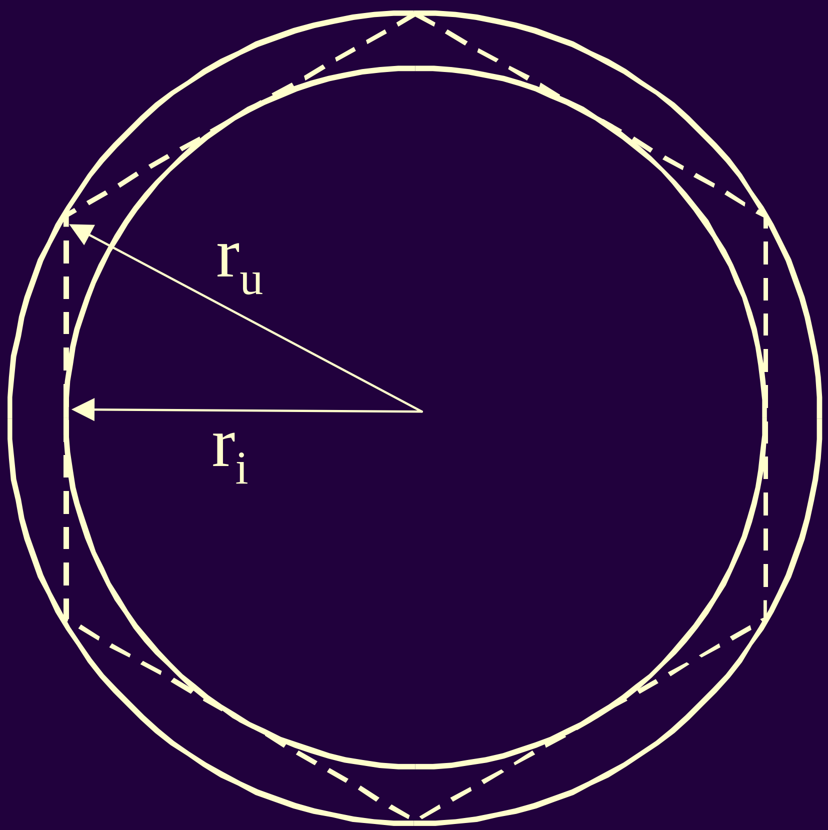
$$\frac{F_u}{F_i} = 2$$

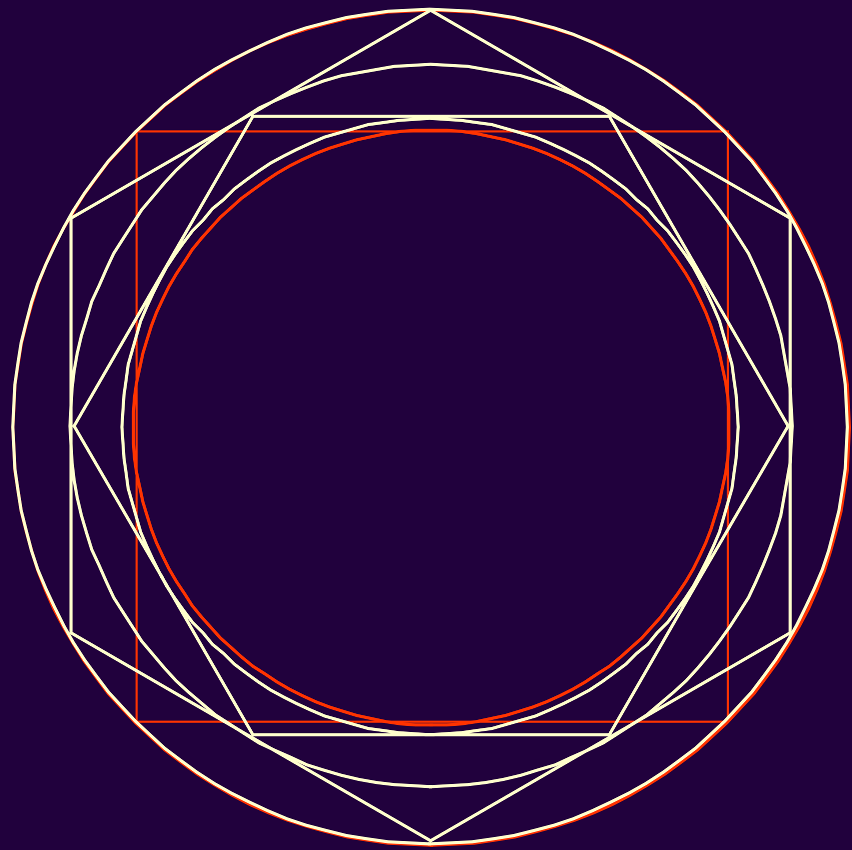
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Der Umkreis weist also genau die doppelte Fläche des Inkreises auf.

Musikalisch entspricht dies der Oktave (2:1).

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de





$$\frac{r_u}{r_i} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad ; \quad \frac{F_u}{F_i} = \frac{4}{3}$$

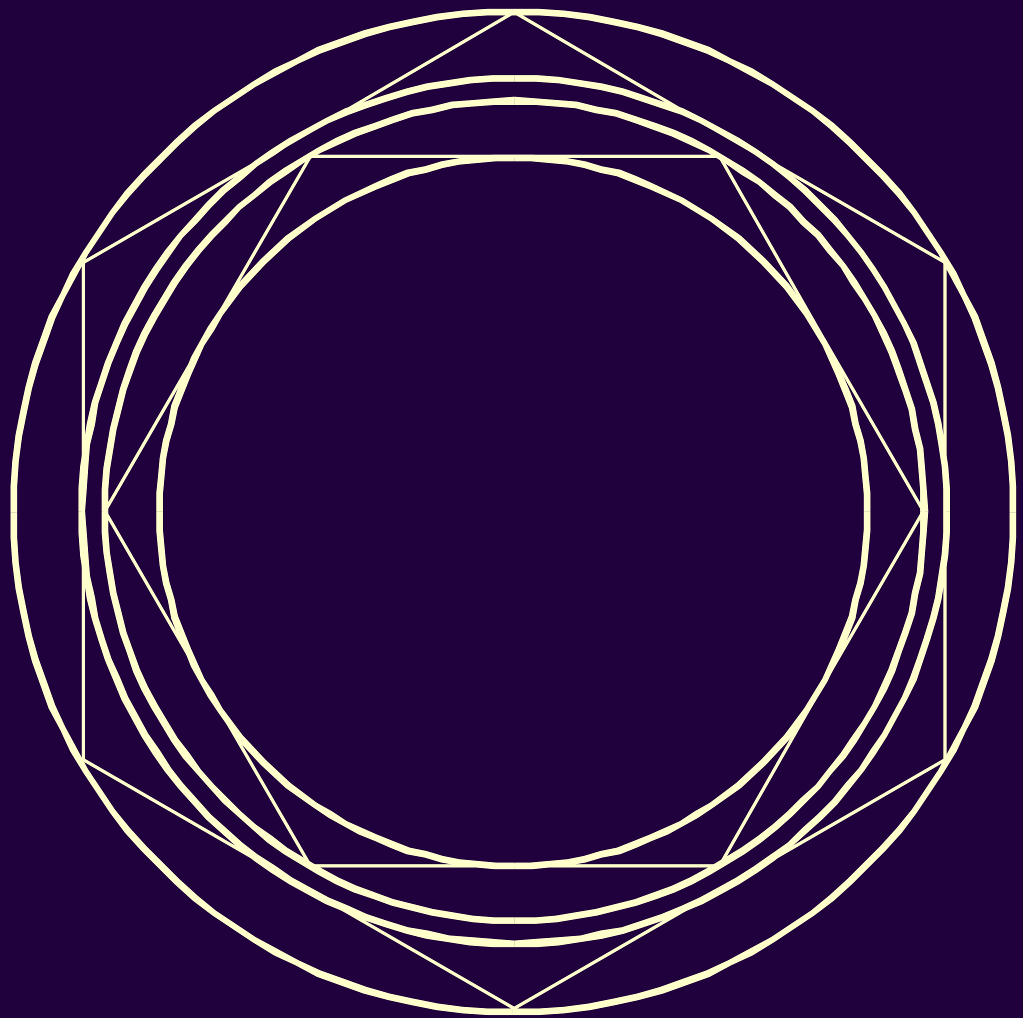
$$\frac{4}{3} * \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \qquad 2 \div \frac{16}{9} = \frac{9}{8}$$

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Beim Sechseck hat der Umkreis genau 4/3 mal die Fläche des Inkreises.

Musikalisch entspricht dies der Quarte (4:3).

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



$$\frac{4}{3} * \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3} * \frac{3}{2} = 2$$

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Damit haben wir die Hauptverhältnisse der griechischen Musik gefunden (Oktave, Quarte, Quinte (3:2) und zusätzlich den Ganzton (9:8)), welche auch in der späteren europäischen Musik beibehalten wurden.

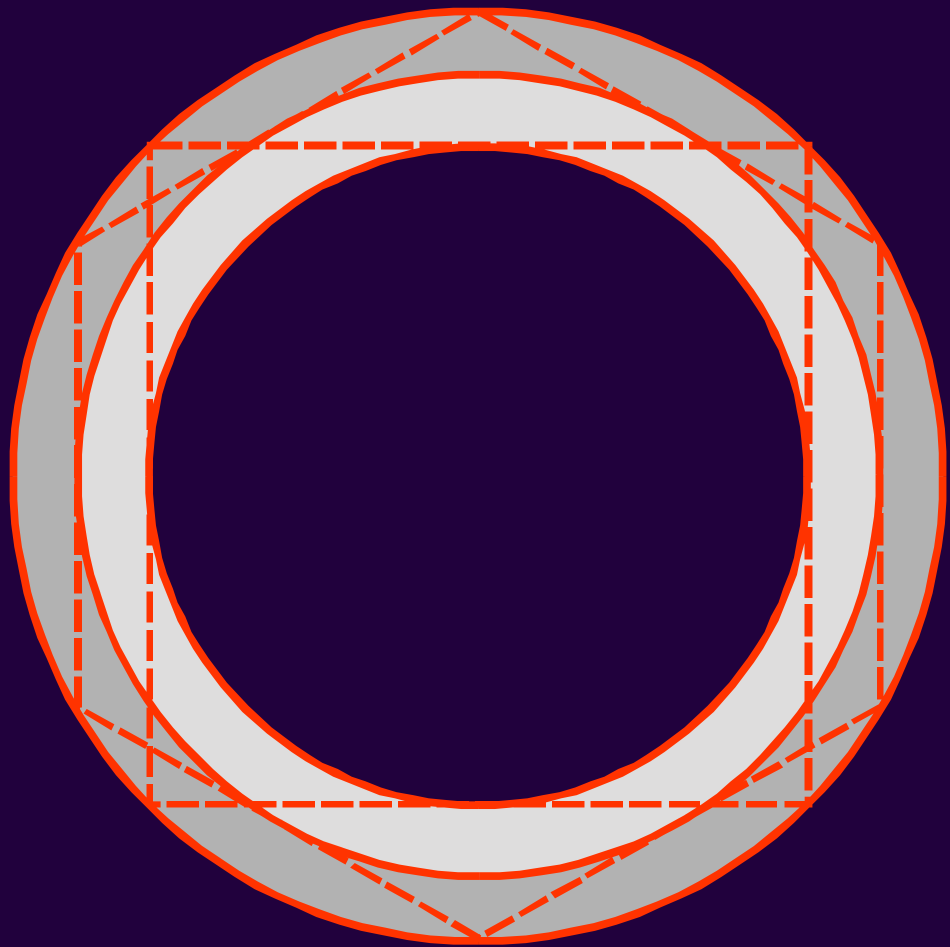
Im Prinzip gelten diese Intervalle (Oktave, Quarte, Quinte) in allen Musikkulturen als harmonisch, vor allem die Oktave, die selbst in der atonalen Musik noch als strukturbildend beibehalten wird.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Geometrisch können wir sie durch folgende einfache Konstruktion vereint darstellen:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Oktave, Quarte, Quinte

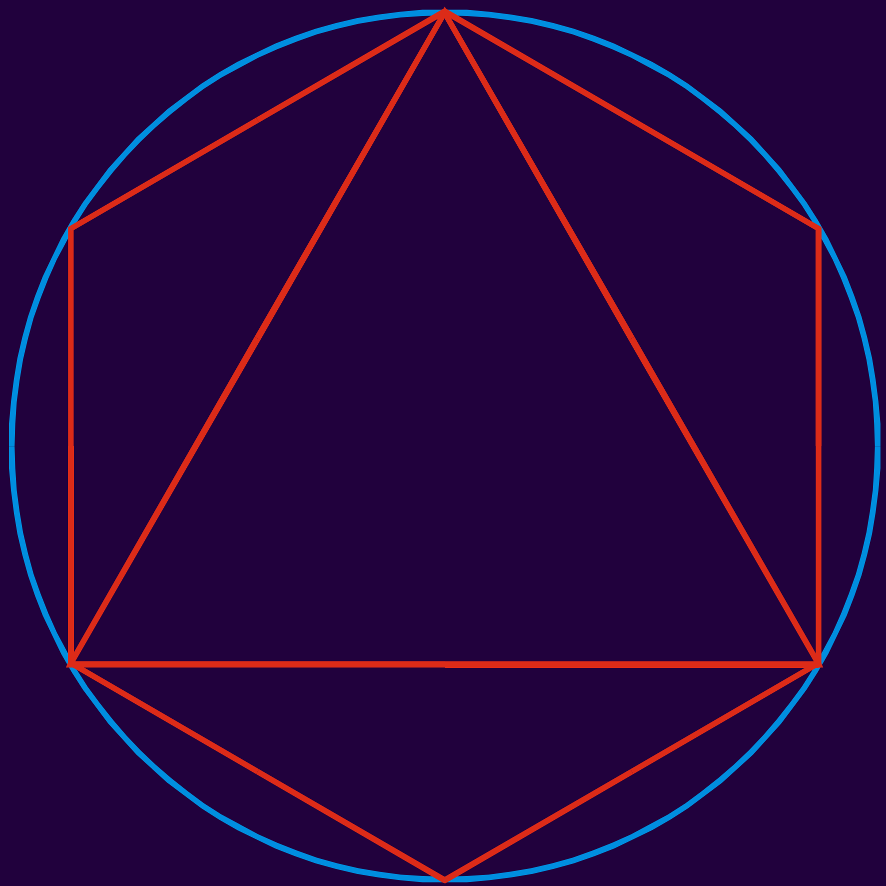


dunkelgrau: Quarte 4:3,   hellgrau: Quinte 3:2,   zusammen Oktave 2:1

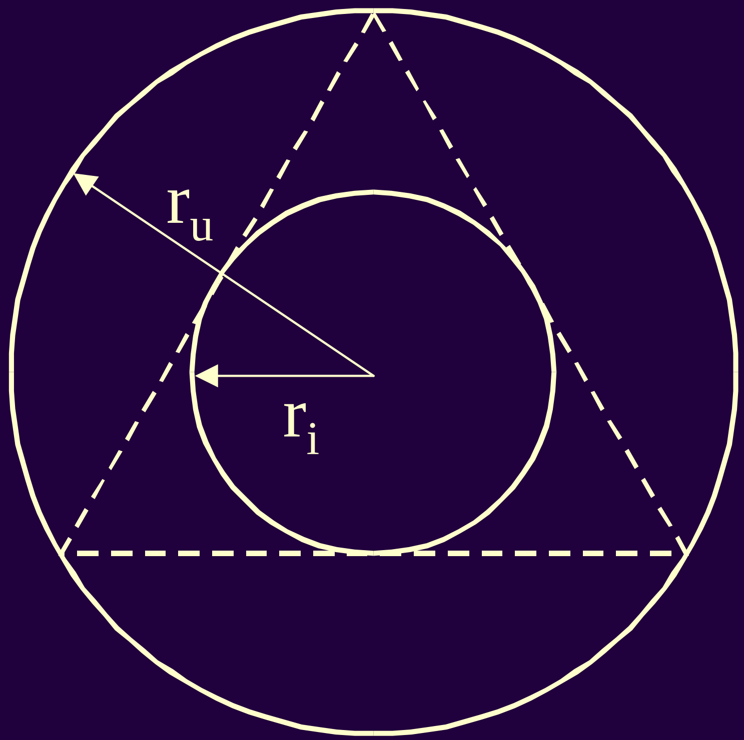
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

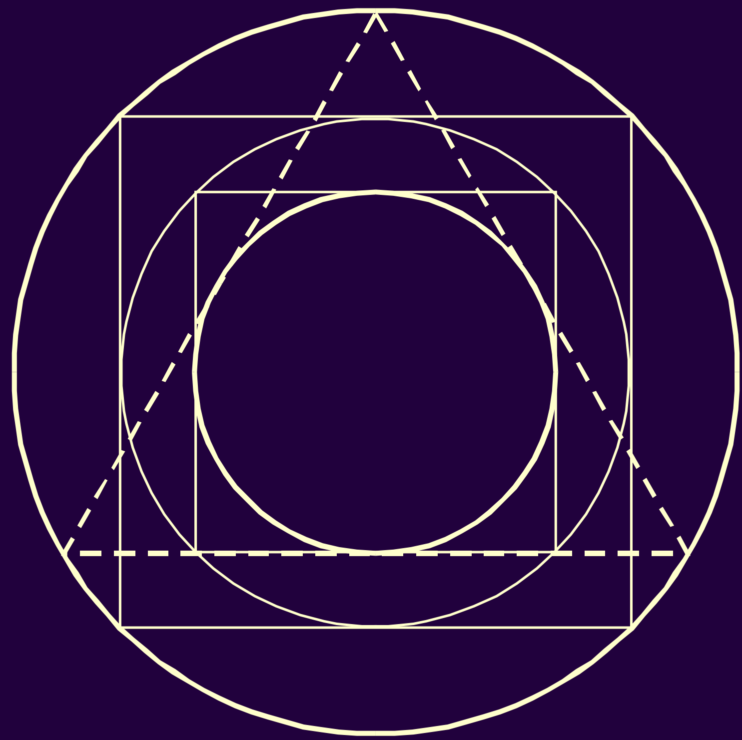
Kommen wir nun zum Dreieck, das wir aus dem Sechseck konstruieren können:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de





$$\frac{r_u}{r_i} = 2 \quad ; \quad \frac{F_u}{F_i} = 4$$

$$\frac{r_u}{r_i} = \sqrt{2} \quad ; \quad \frac{F_u}{F_i} = 2$$

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Ein Verhältnis der Flächen von 4:1 läßt sich also durch ein Dreieck oder durch zwei Quadrate konstruieren.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

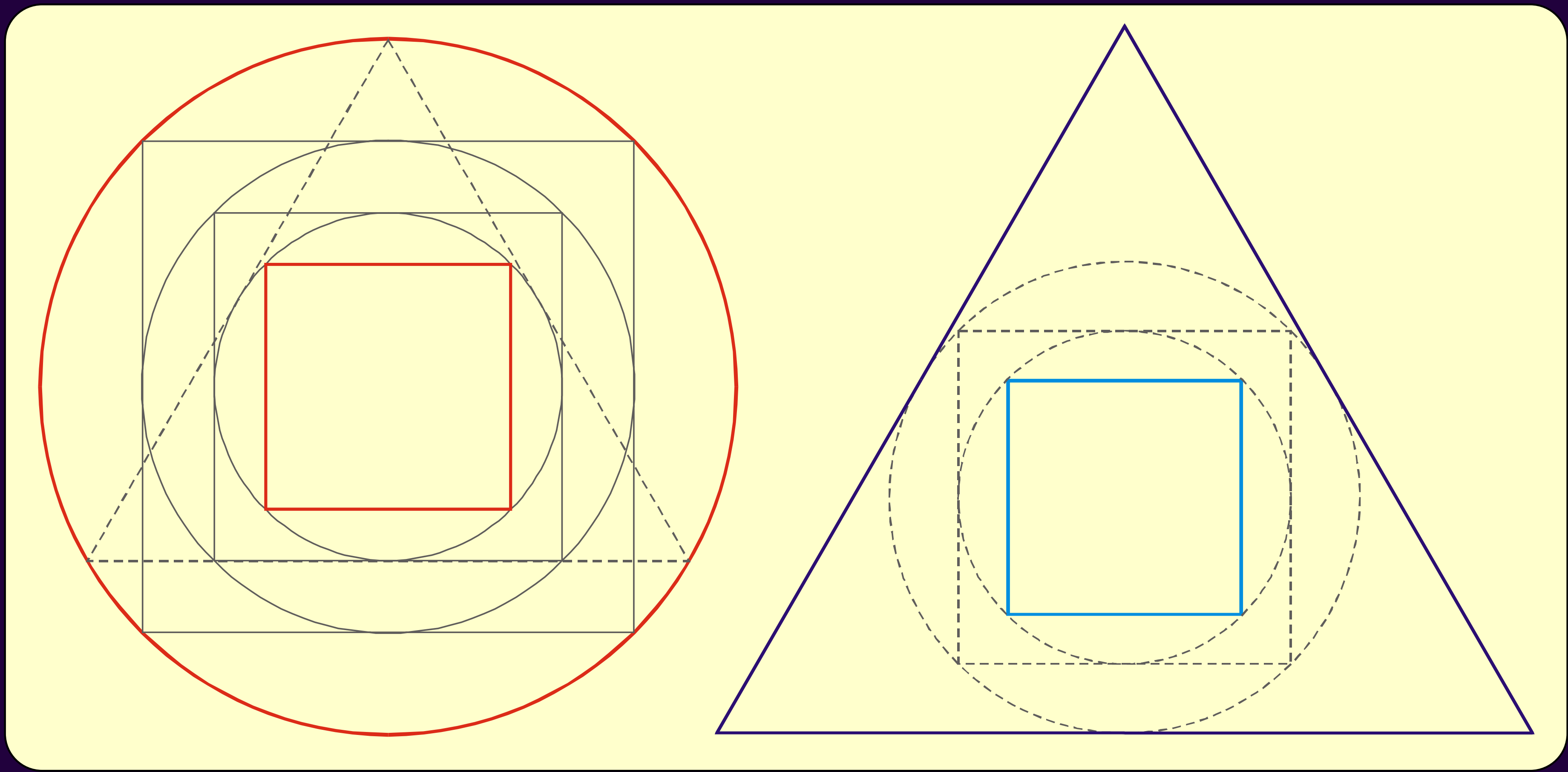
Es zeigt sich nun, daß auch die räumlichen Verhältnisse im Planetensystem mit einfachen Konstruktionen aus Kreis, Dreieck und Viereck systematisch sehr exakt anzunähern sind.

Dabei müssen die Kleinen Halbachsen der Planetenbahnen zu Grunde gelegt werden.

Ein Beispiel:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Verhältnisse der kleinen Halbachsen zwischen Außen und Innen



äußerer Kreis: Saturn
inneres Quadrat: Mars

Dreieck: Jupiter
Quadrat: Erde

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Die sich in den dargestellten Konstruktionen ergebenden Flächenverhältnisse entsprechen mit äußerst geringer Abweichung den Relationen der Kleinen Halbachsen zwischen den genannten Planeten.

In dem Buch „Die Signatur der Sphären“ von Hartmut Warm wird nachgewiesen, daß dieses Prinzip für sämtliche Planeten gilt, und daß eine rein zufällige Übereinstimmung zwischen den geometrischen und den planetarischen Verhältnissen statistisch äußerst unwahrscheinlich ist.

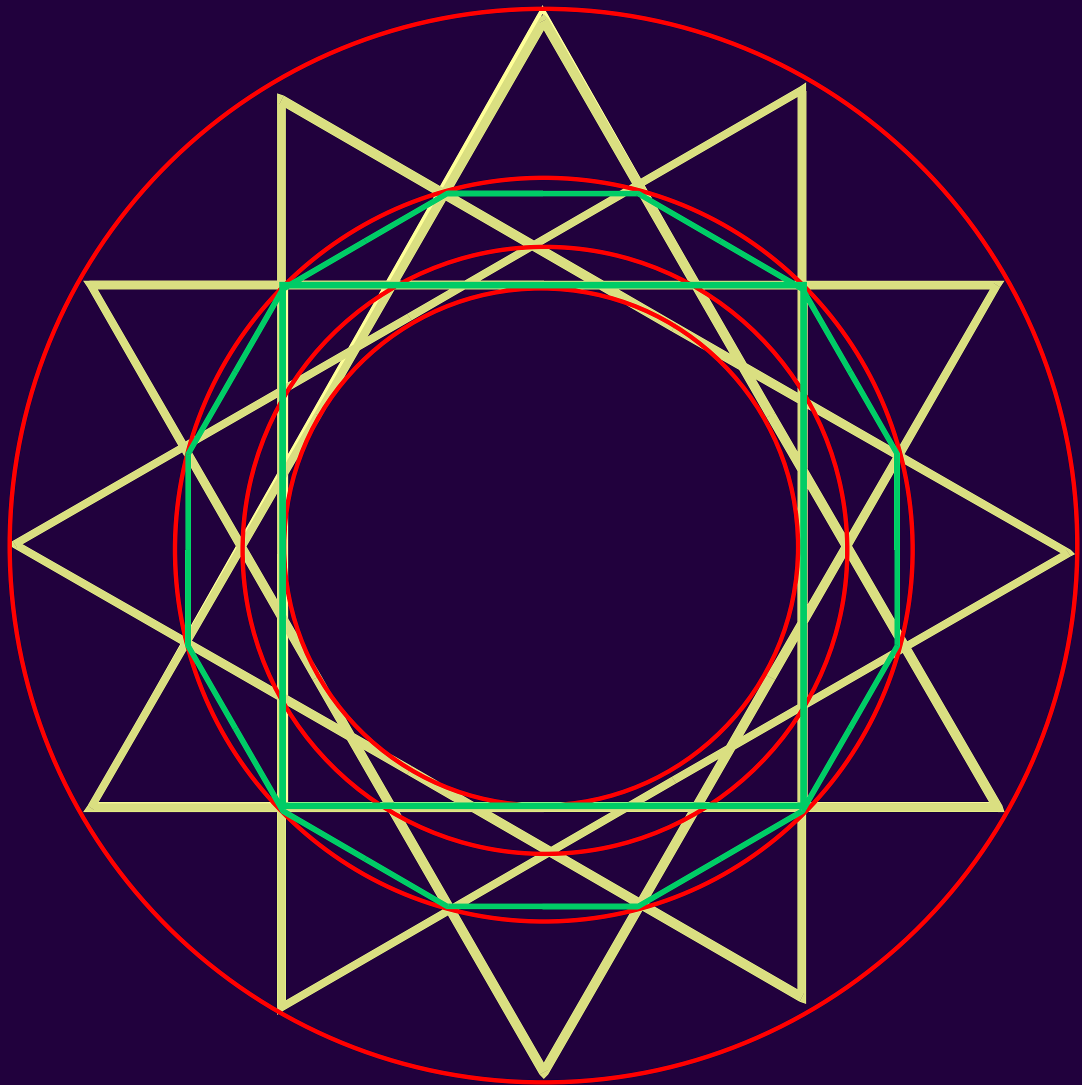
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Dreieck und Viereck finden sich zusammen im Zwölfstern wieder.

In einem weiteren Schritt läßt sich zeigen, daß man im Zwölfstern sowohl die Verhältnisse der bisher behandelten musikalischen Grundintervalle findet als auch die Verhältnisse der Kleinen Halbachsen aller Planeten inkl. Pluto (Nachweis in der „Signatur der Sphären“).

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Verhältnisse der Musik und der Kleinen Halbachsen der Planeten im Zwölfstern



Verhältnisse der Flächen:

12 : 6 : 4 : 3
Oktave, Quinte, Quarte

Verhältnisse der Flächen (beispielhaft):

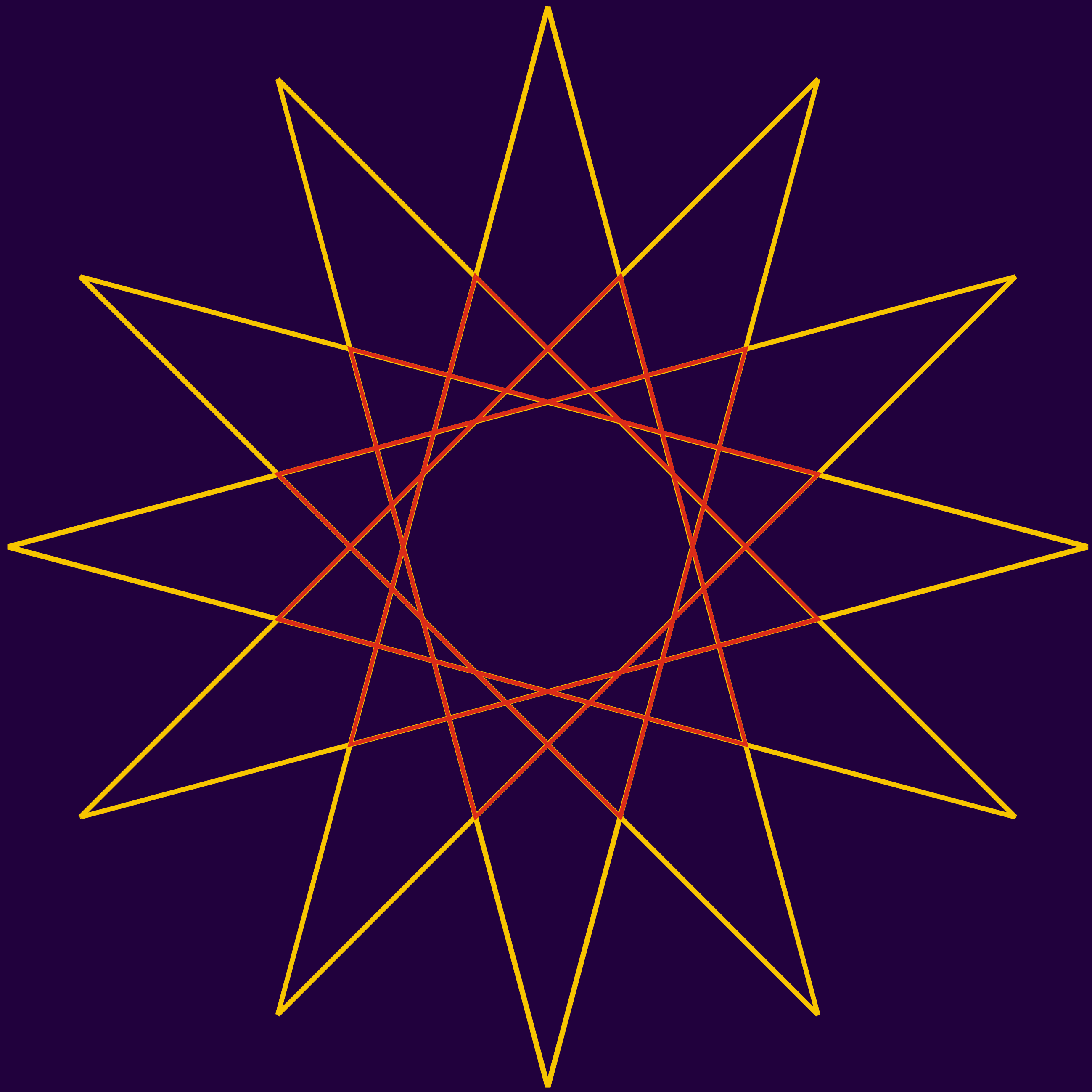
6 : π = Ve / Me

4 : π = Pl / Ne

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Bei dem gezeigten Zwölfstern handelt es sich um denjenigen aus 4 Dreiecken. Er ergibt sich durch das Zeichnen des echten Zwölfsterns (in einem Linienzug zu zeichnen) in dessen Inneren.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

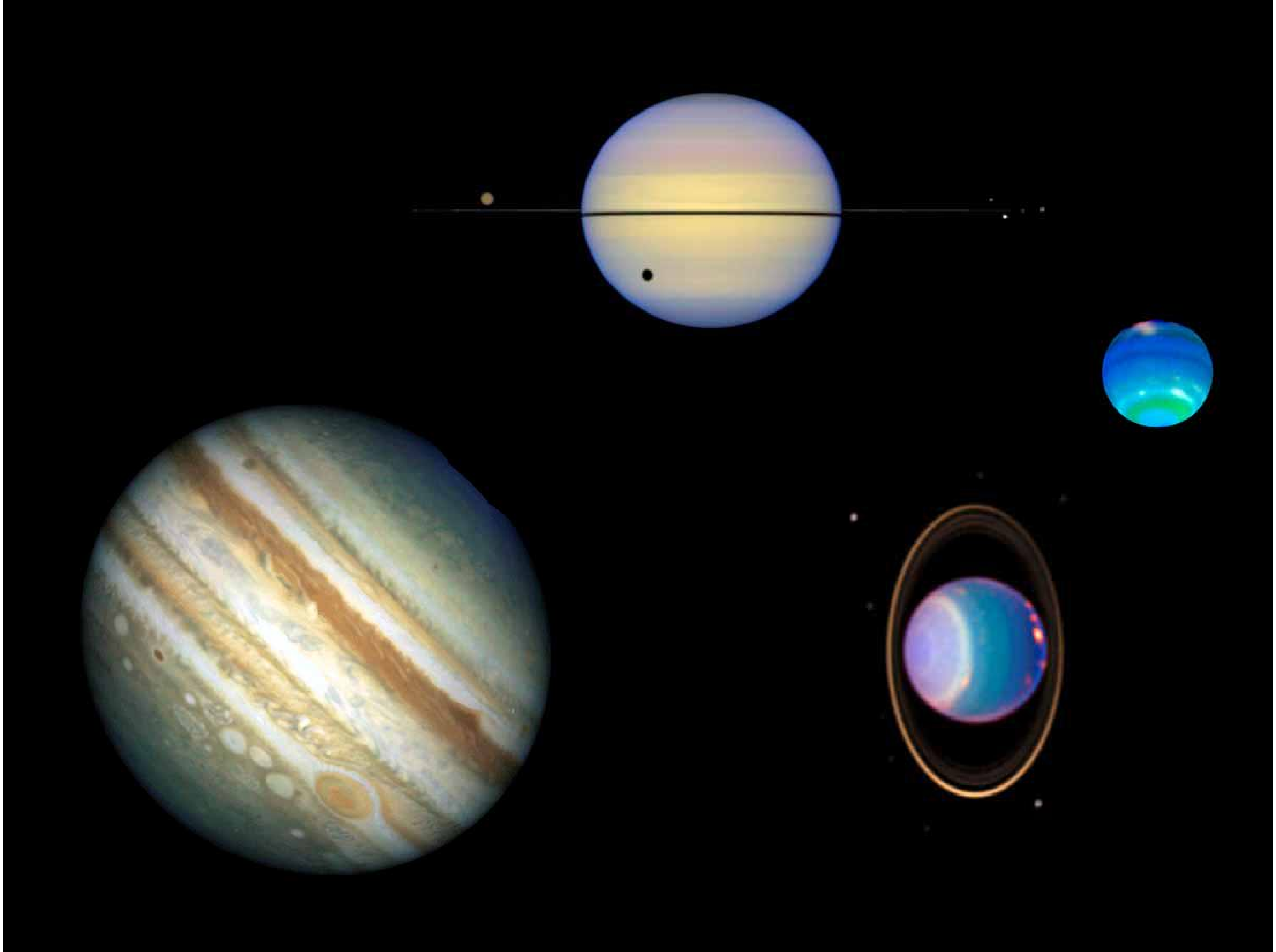
Kommen wir nun zu den Bewegungen der Planeten.

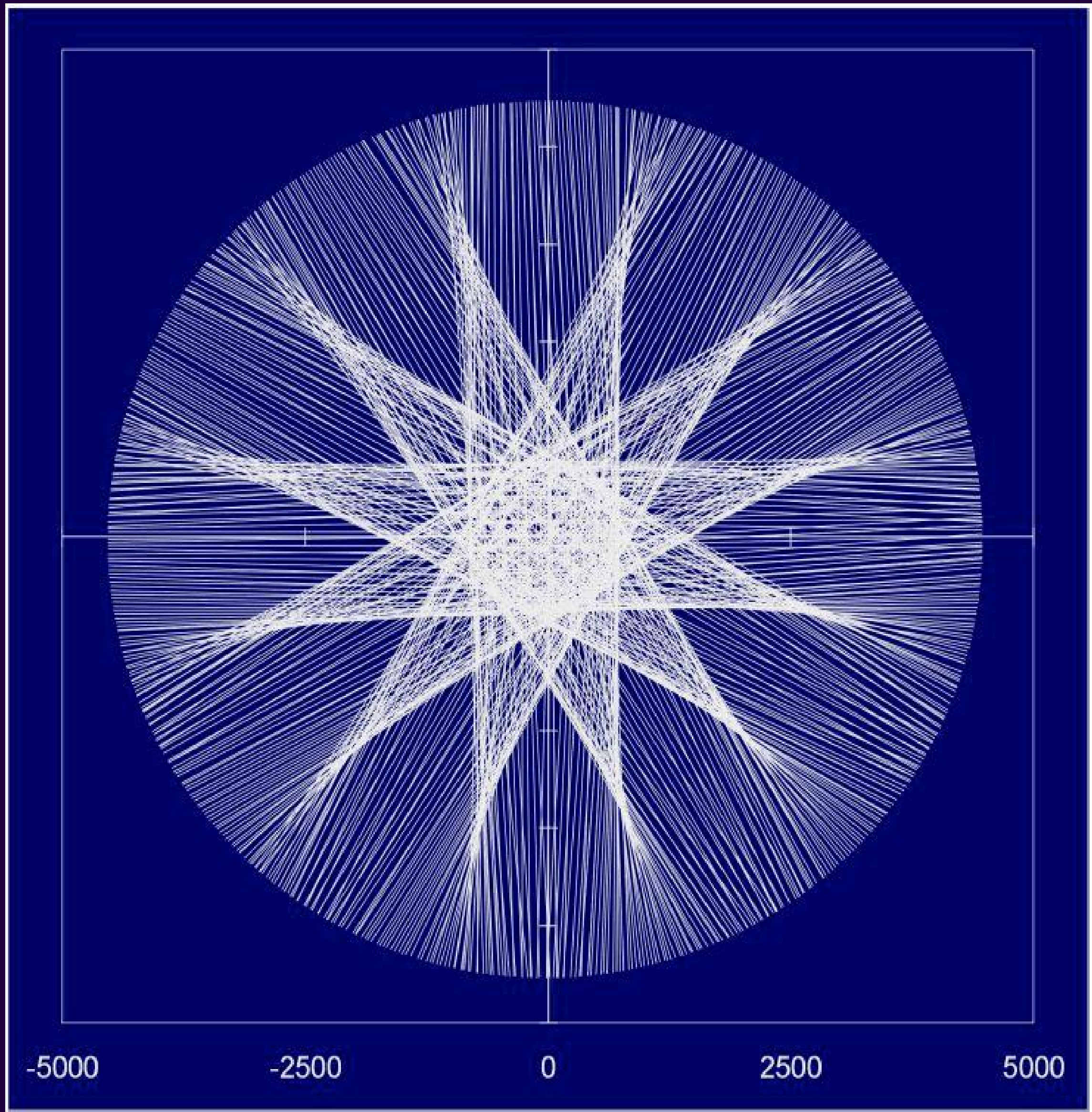
Da diese bei früheren Harmonik-Symposien ausführlich dargestellt wurden, werden hier nur beispielhafte Endergebnisse gezeigt (Einzelheiten siehe ebenfalls „Die Signatur der Sphären“).

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Zunächst die Bewegungsfigur, die sich zwischen den 3 massivsten Planeten unseres Sonnensystems, Jupiter, Saturn und Neptun ergibt (Uranus ist auf dem gleich folgenden Bild ebenfalls zu sehen):

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



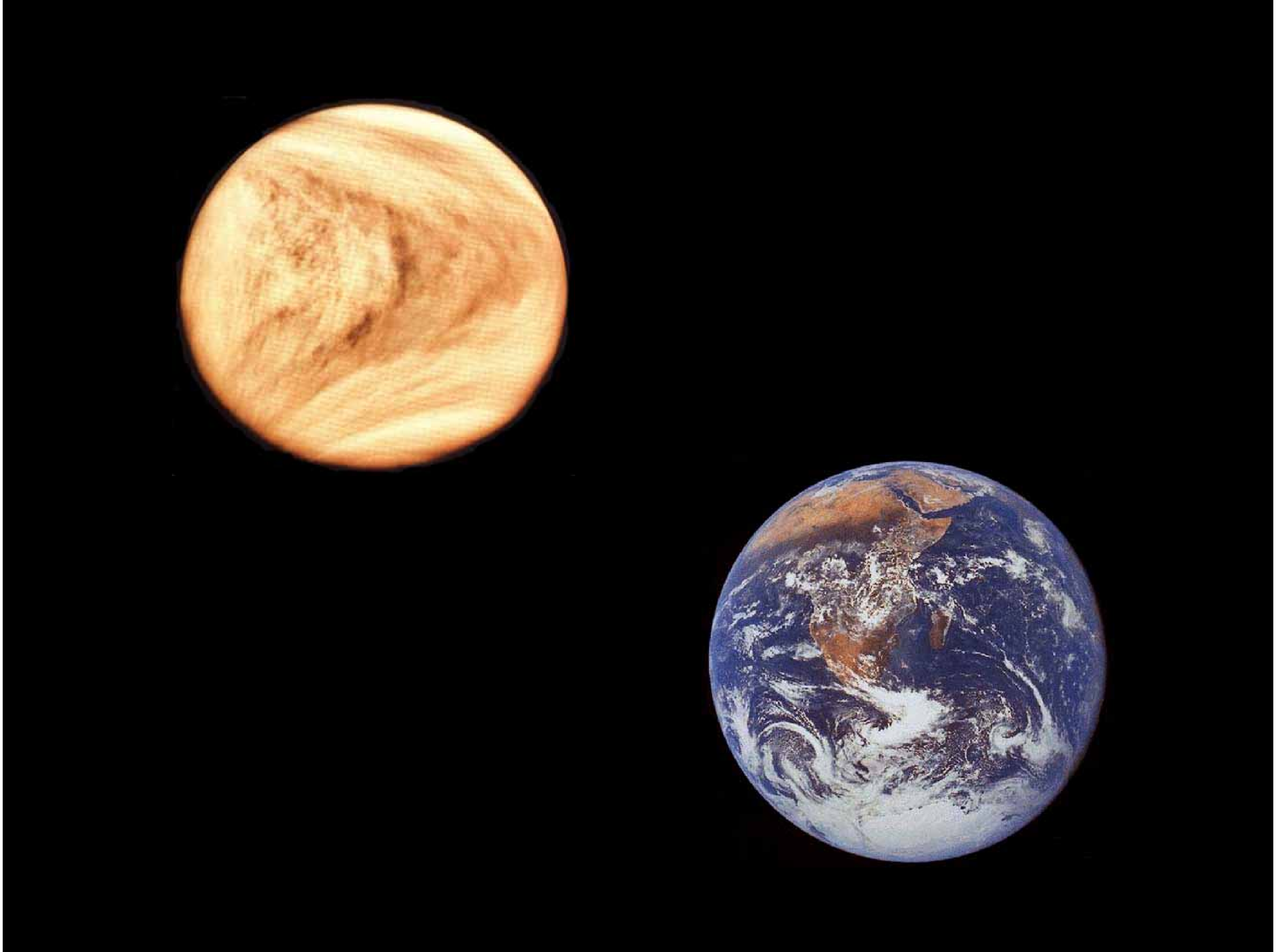


Raumgeraden Jupiter-Neptun bei Jupiter/Saturn-Konjunktionen, 750 mal, Zeitraum 14.894 Jahre

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

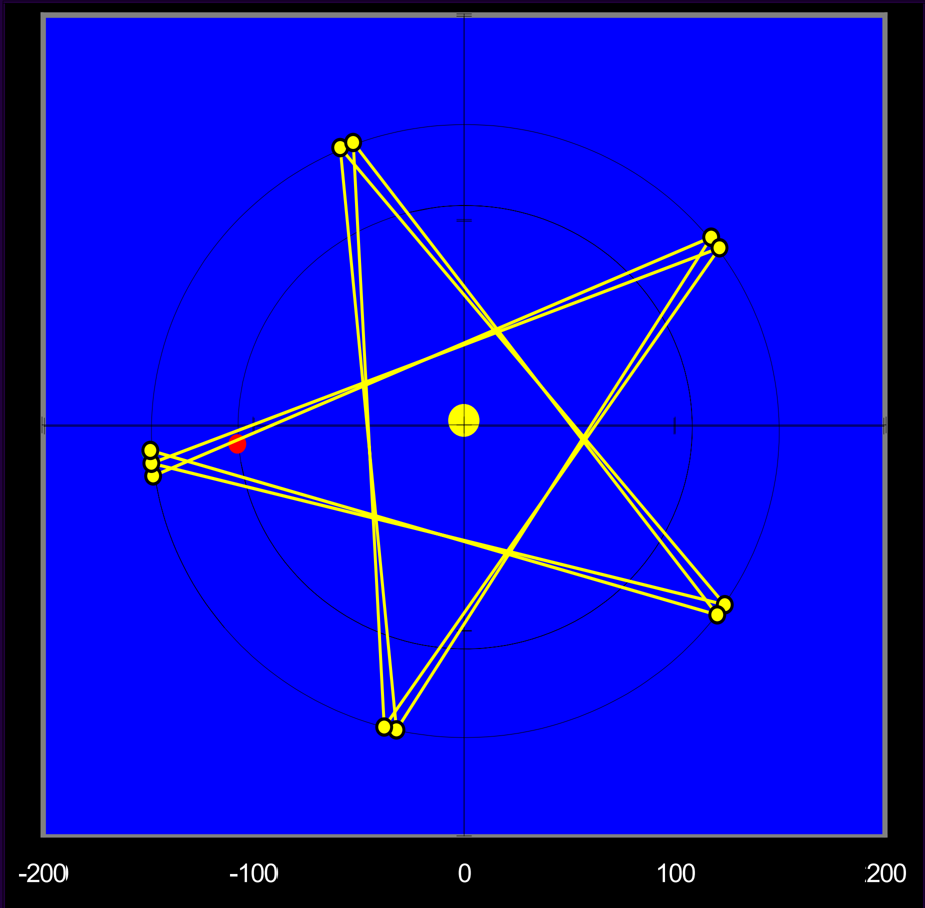
Venus und Erde zeichen folgende Figur:

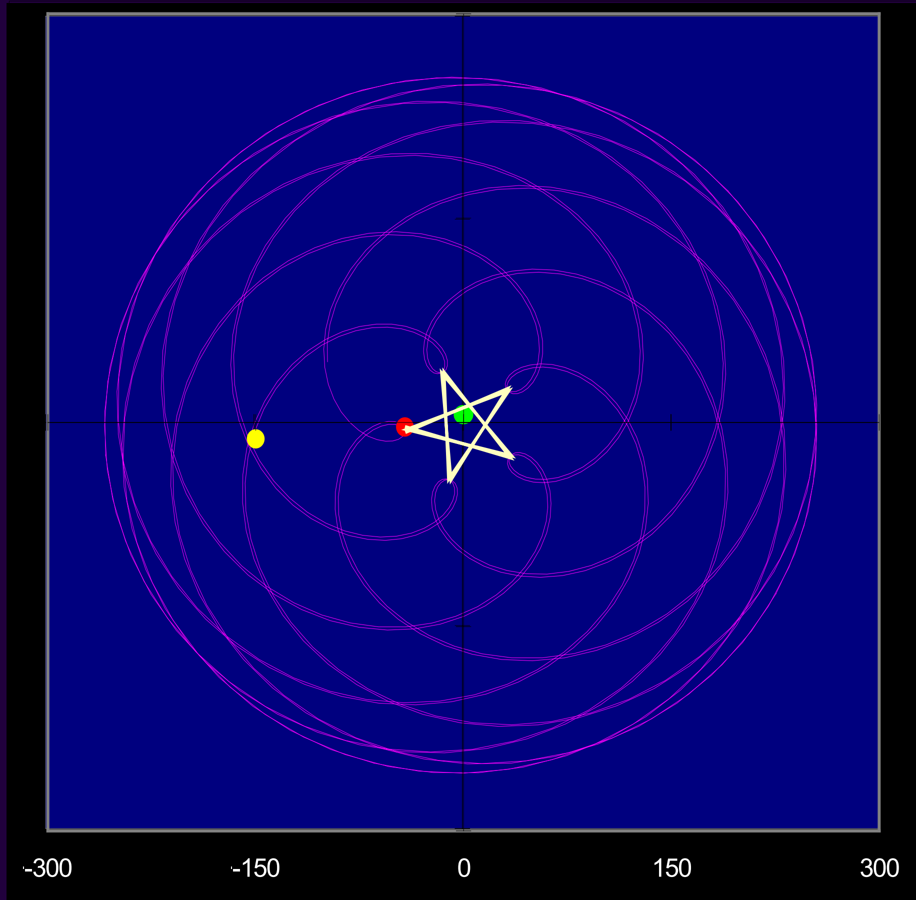
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Erde/Venus

Periode 583,921 Tage





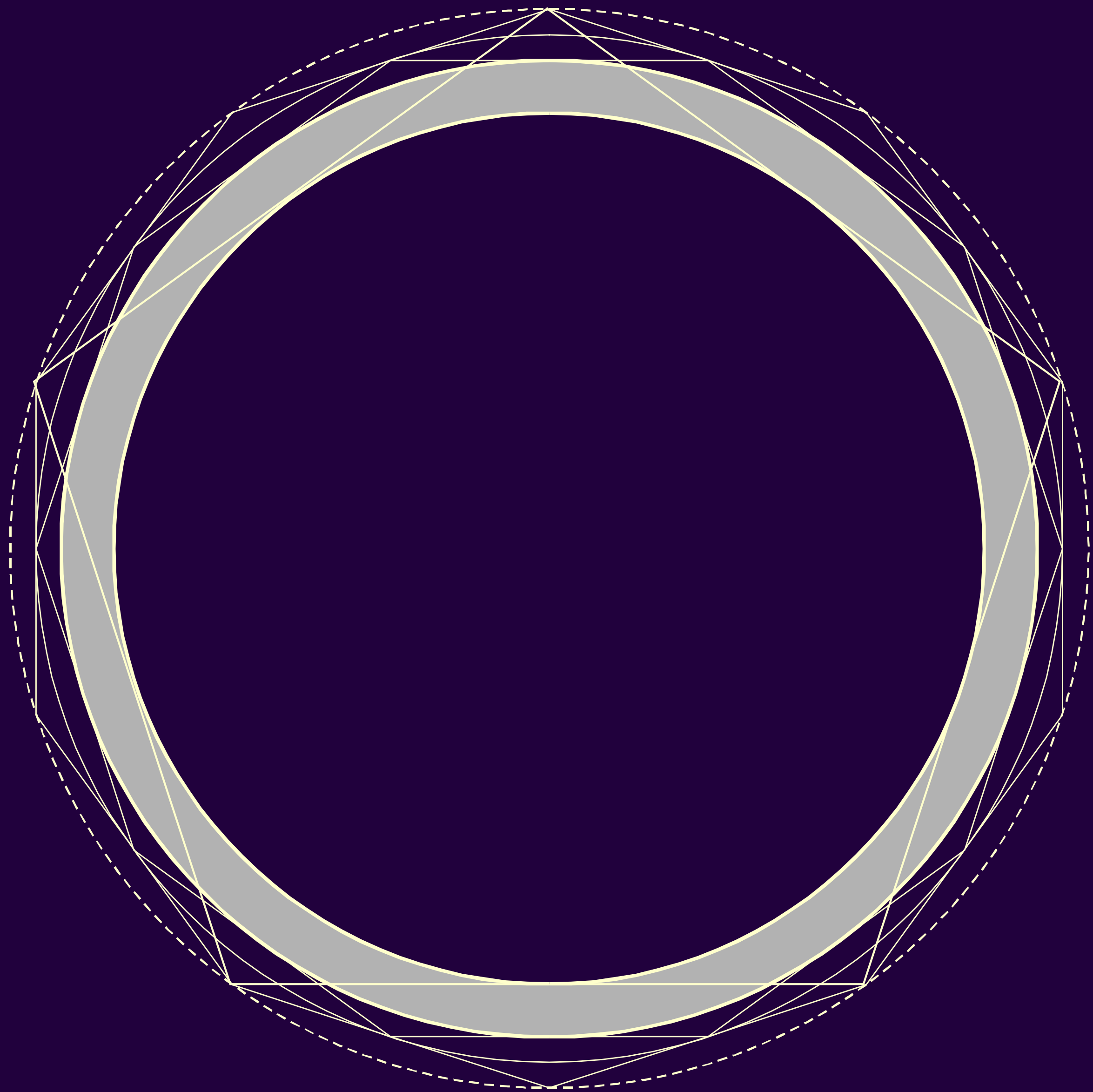
Umlaufzeiten 13:8, d.h 5 Konjunktionen in 8 (7,993) Jahren

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Die hier zum Tragen kommende Fünf ist musikalisch in der Großen (und Kleinen) Terz enthalten, also dem Intervall 5:4.

Geometrisch läßt sie sich ebenfalls als Flächenverhältnis einfacher Eckfiguren finden:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Fünfeckkreis

$$6-2*\sqrt{5}=1{,}52786..$$

Zehneckkreis

$$8/\left(5+\sqrt{5}\right)=1{,}10557..$$

$$\frac{1{,}52786..}{1{,}10557..}=\left(5-\sqrt{5}\right)/\,2=1{,}381966..$$

$$\frac{1{,}381966..}{1{,}105572..}=\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{2*8}=$$

$$\frac{25-5}{16}=\underline{\underline{1{,}25}}$$

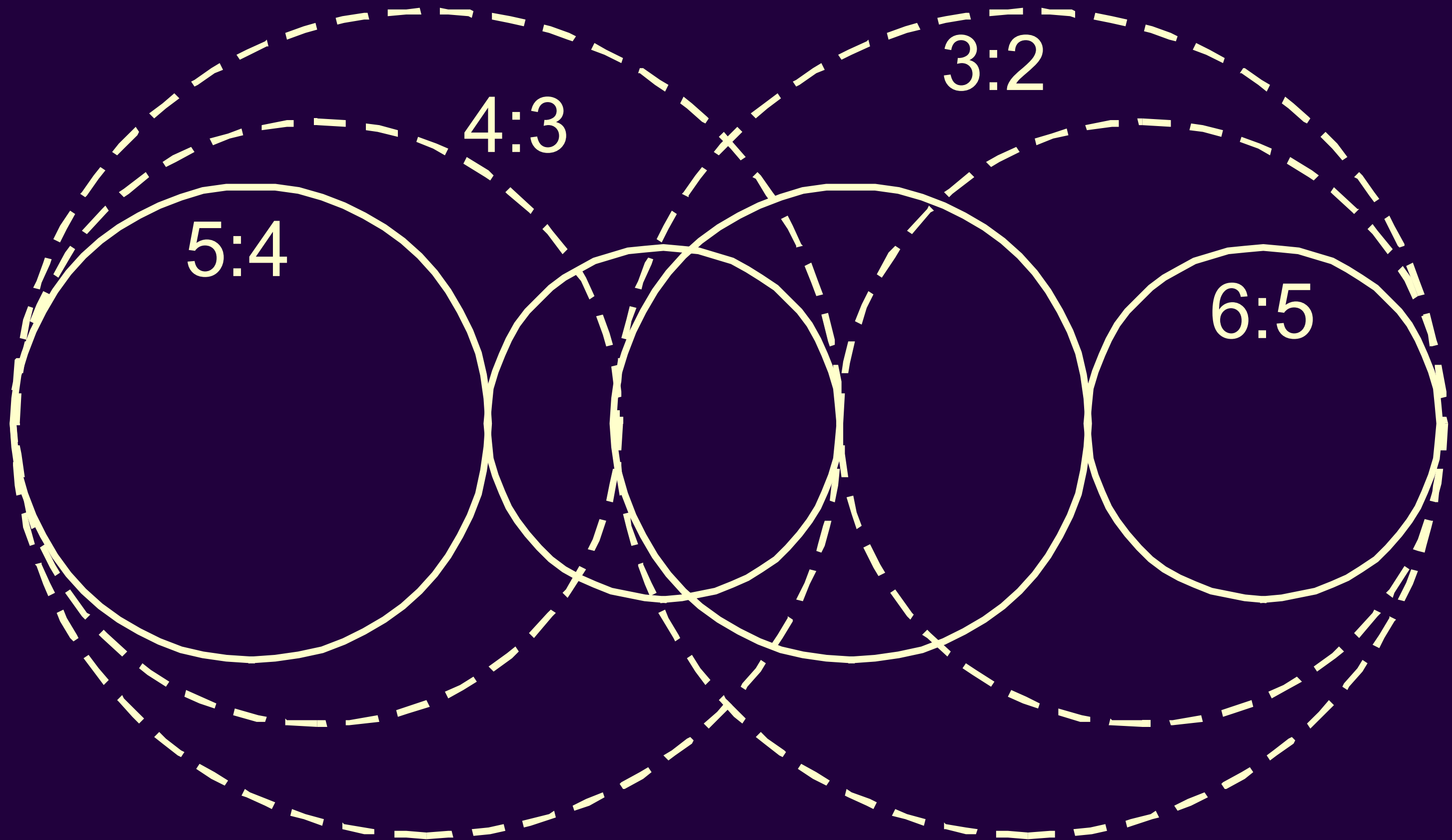
große Terz 5:4 aus Fünfeck und zwei Zehnecken

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Damit können wir die vorher gefundene Grundstruktur der griechischen Tonleitern erweitern und erhalten die Grundstruktur der Dur- (und Moll-)tonleitern:

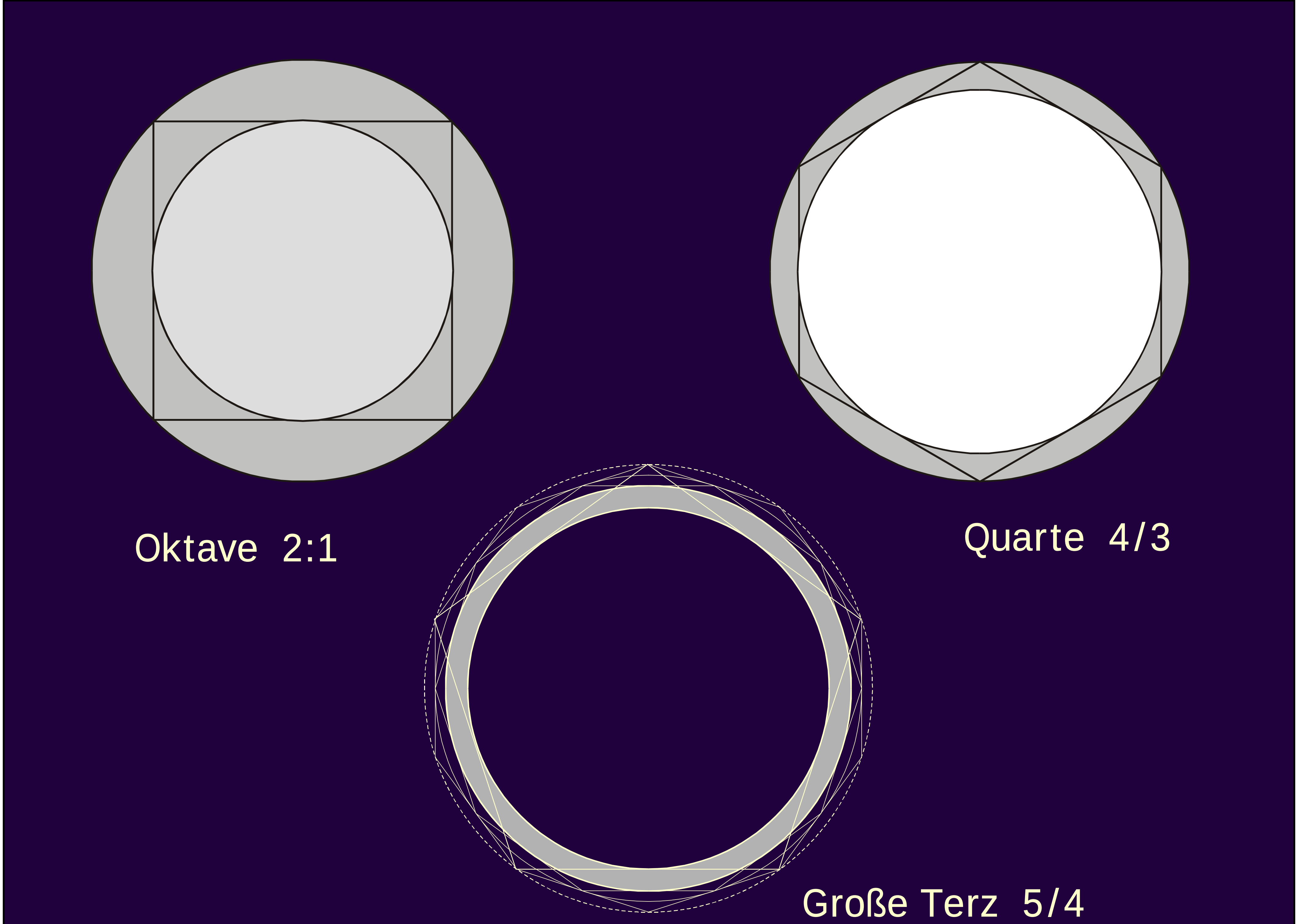
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Grundstruktur der Dur-Tonleiter



Fasssen wir die 3 geometrischen Konstruktionen zusammen, mit denen die musikalischen Verhältnisse dargestellt werden können:

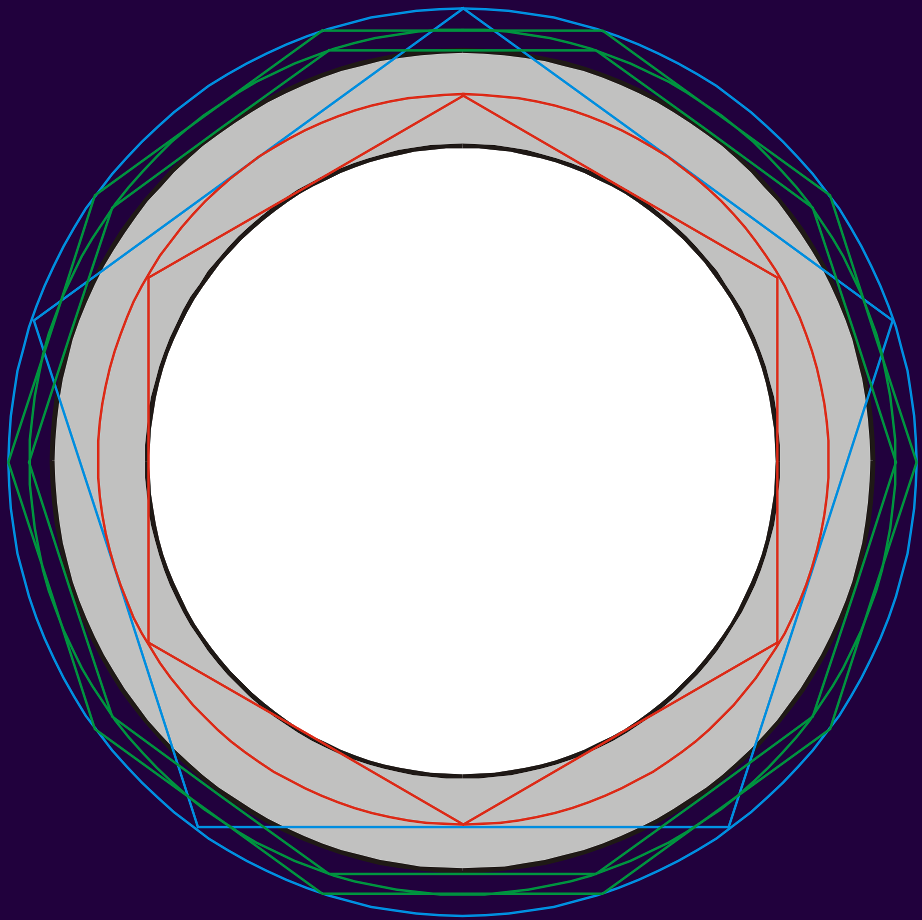
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



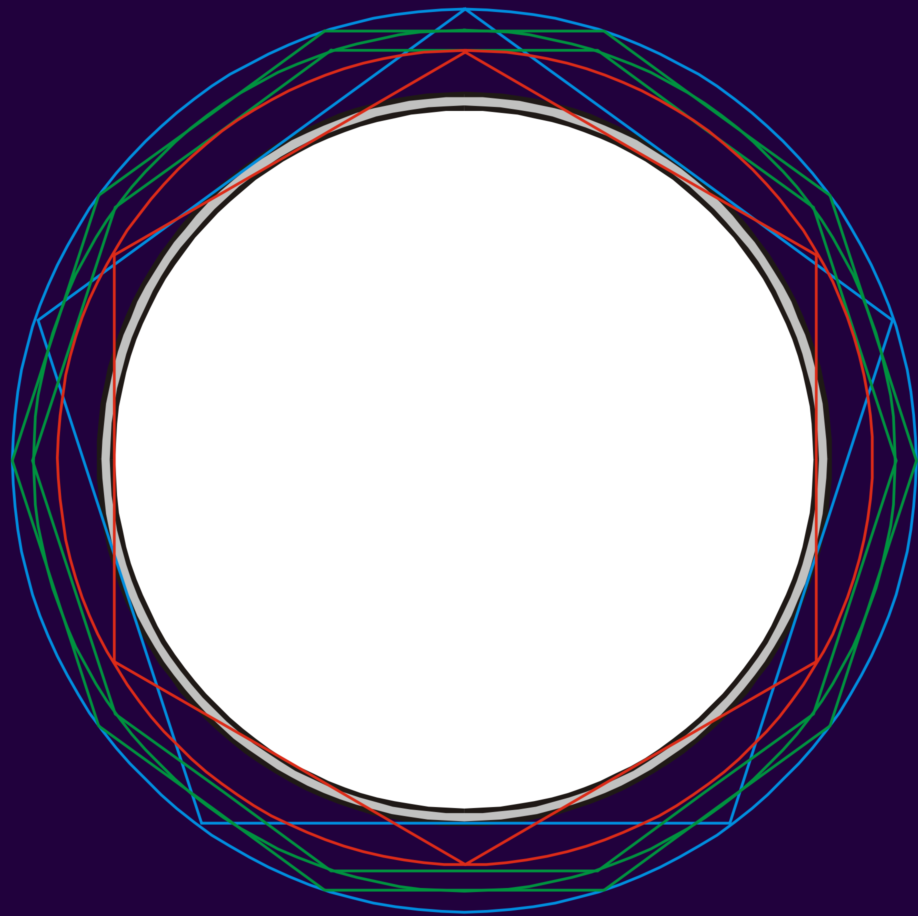
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Alle anderen musikalischen Intervalle ergeben sich aus Kombinationen dieser 3 Grundkonstruktionen (die Quinte aus Viereck und Sechseck hatten wir bereits kennengelernt). Weitere Beispiele dafür:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Große Sexte 5 : 3 = 4/3 * 5/4



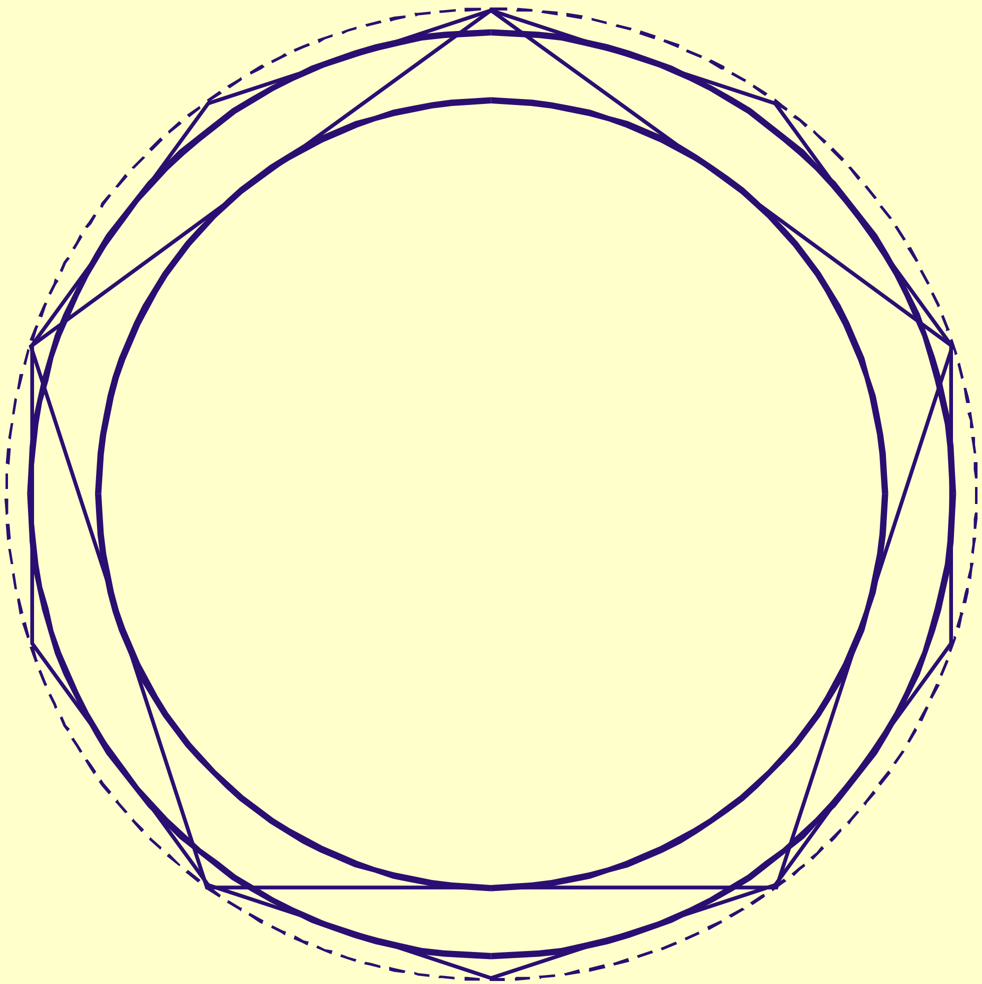
Halbton 16 : 15 = (4/3) / (5/4)

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Bei der Konstruktion der Großen Terz aus Fünfecken und 2 Zehnecken hatten wir gesehen, daß durch das 1. Zehneck ein Verhältnis vom 1,381966.. abgeteilt wird.

Diese Zahl bzw. die Ziffern nach dem Komma stellen die Ergänzung zum Goldenen Schnitt (0,618033..) dar.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



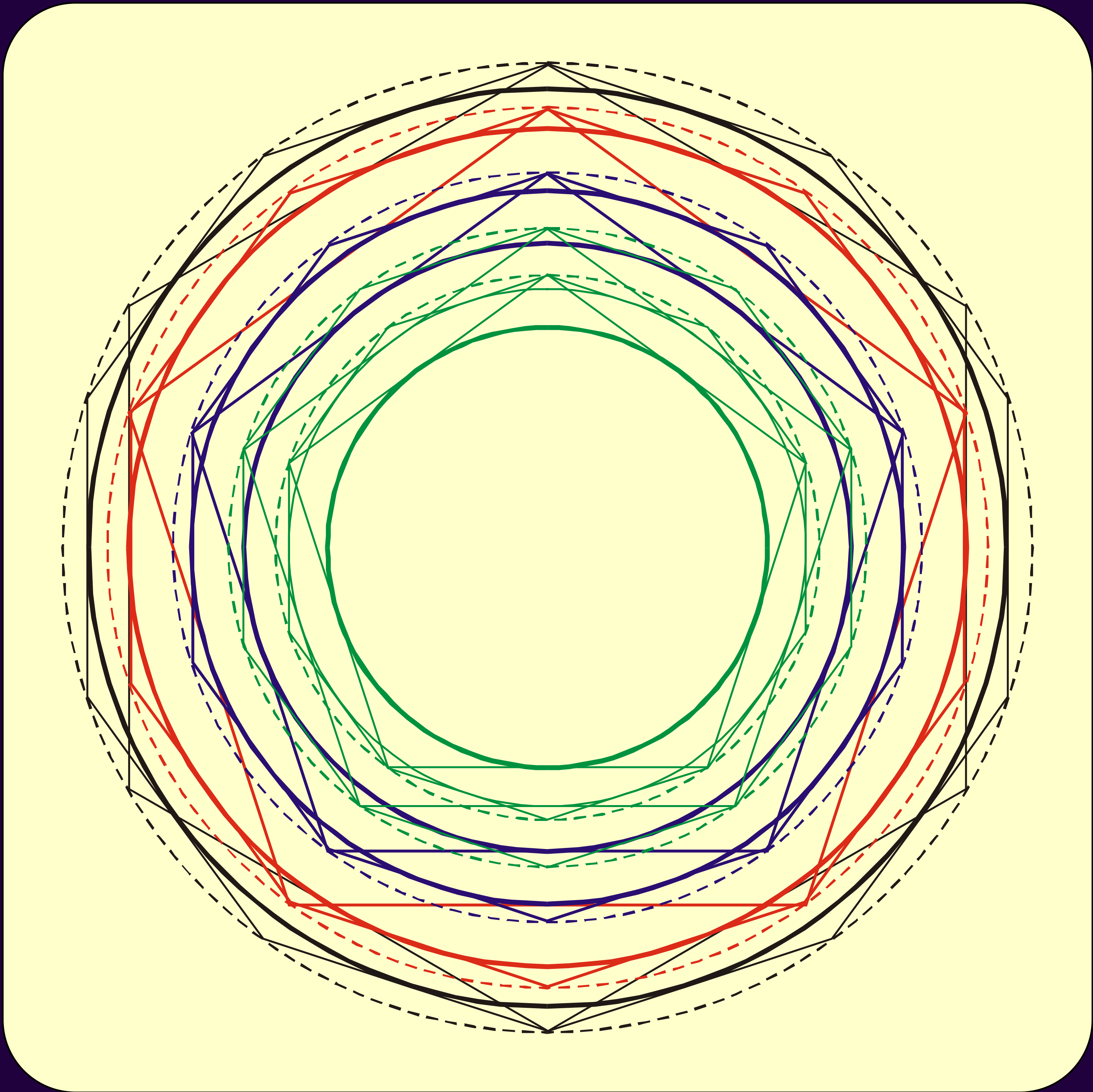
A = 1,381966..

„Silberner Schnitt“

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Es zeigt sich weiterhin, daß mit dieser Proportion sämtliche Verhältnisse der Kleinen Halbachsen im inneren Planetensystem (nur bei Mars Aphel und Perihel) noch exakter anzunähern sind.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Abweichungen geometrisches/ planetarisches Intervall:

Er/Ve - 0,026%

Ve/Me - 0,025 %

Ma.p/Er - 0,026%

Ma.a/Er - 0,028%

A = 1,381966..

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

	geometr. Verhältnis	planetarisches Verhältnis der kleinen Halbachsen		Abweich. (%)
F/Z	1,38196..	Erde/Venus Mars Perihel/Erde	1,38233 1,38161	0,0265 0,0260
$(F/Z)^2$	1,90983..	Venus/Merkur	1,90935	0,0250
$(F/Z)^3$	2,63932..	Erde/Merkur	2,63936	0,0015

Siberner Schnitt (A = F/Z) und inneres Planetensystem

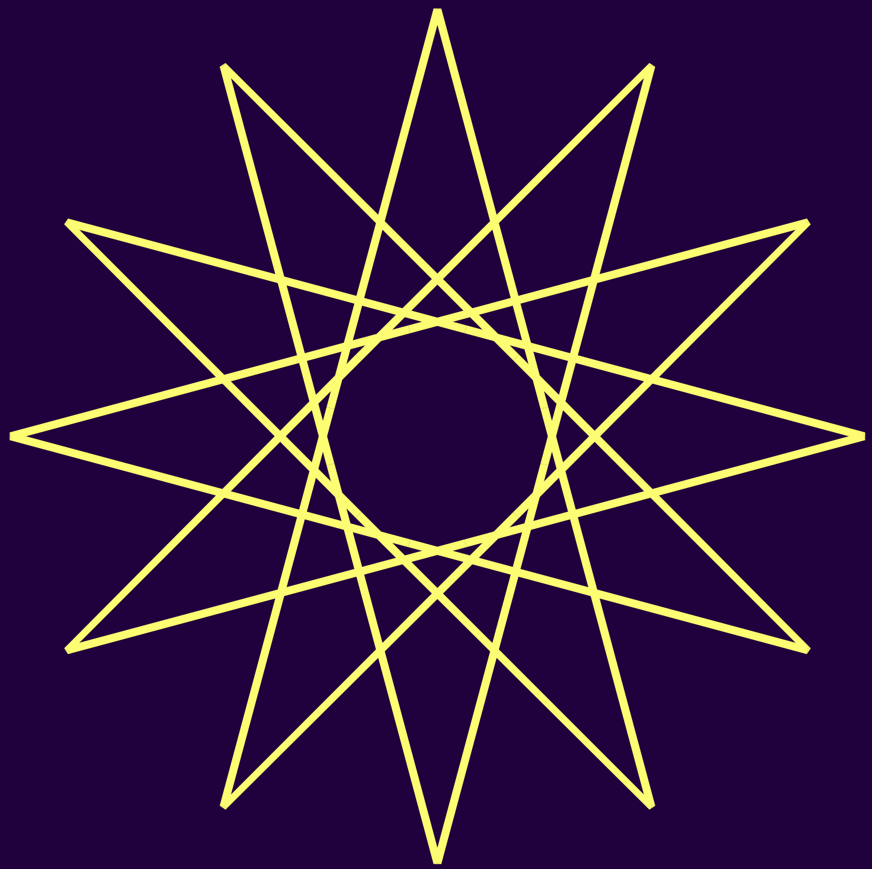
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

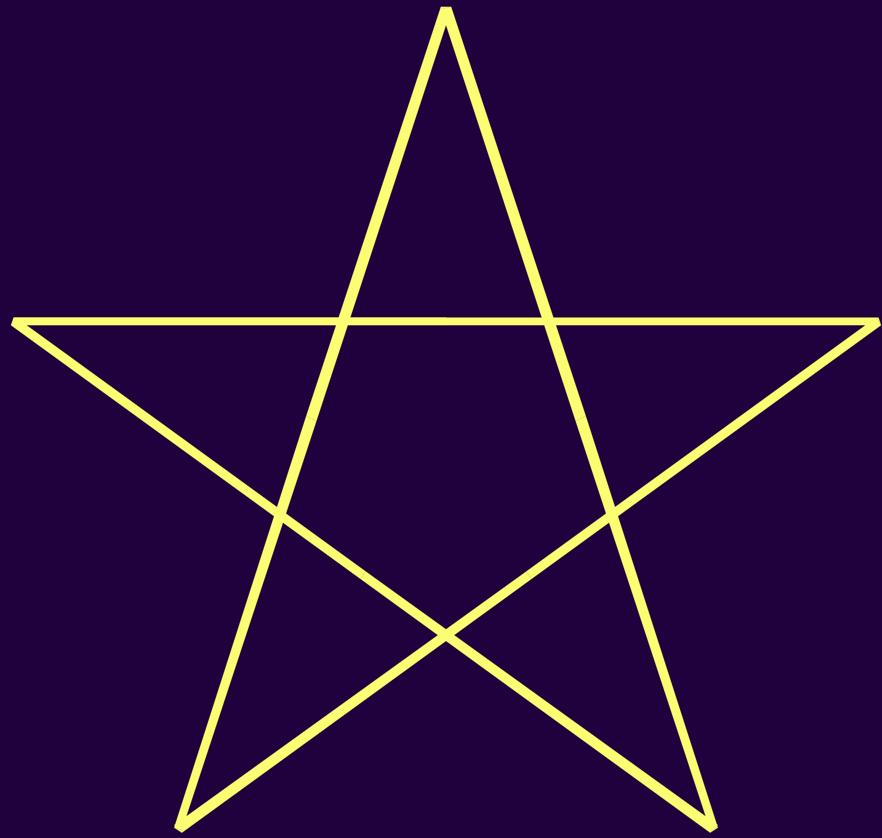
Zwei Sternfiguren spielen also eine ganz besondere Rolle im Planetensystem.

Sie können mit Fug und Recht als Archetypen, also geometrische Urbilder im Sinne Johannes Keplers, bezeichnet werden.

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Archetypische Sternfiguren

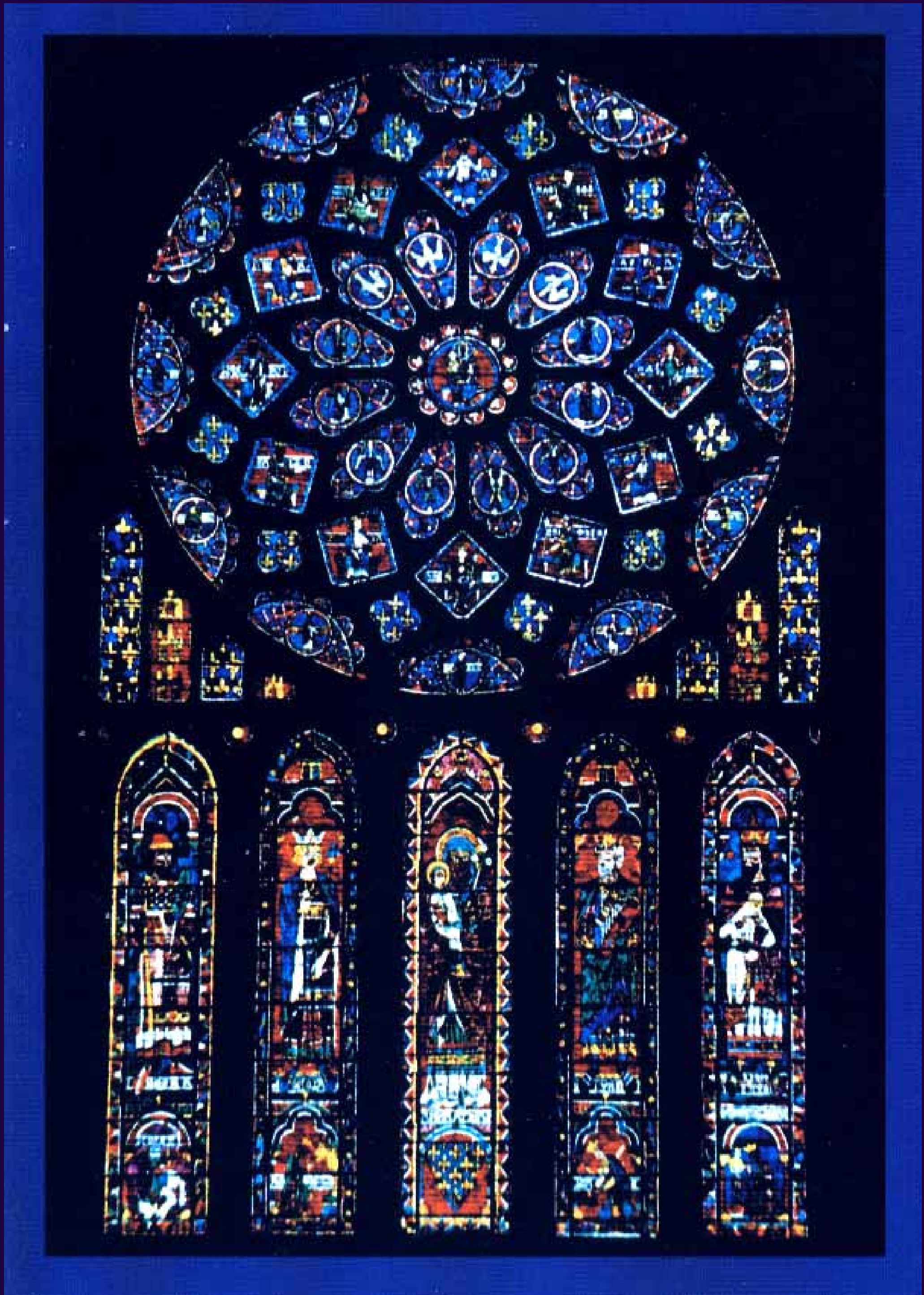




Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Man findet sie auch des öfteren in menschlichen Kunstwerken, in seltenen Fällen sogar kombiniert:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

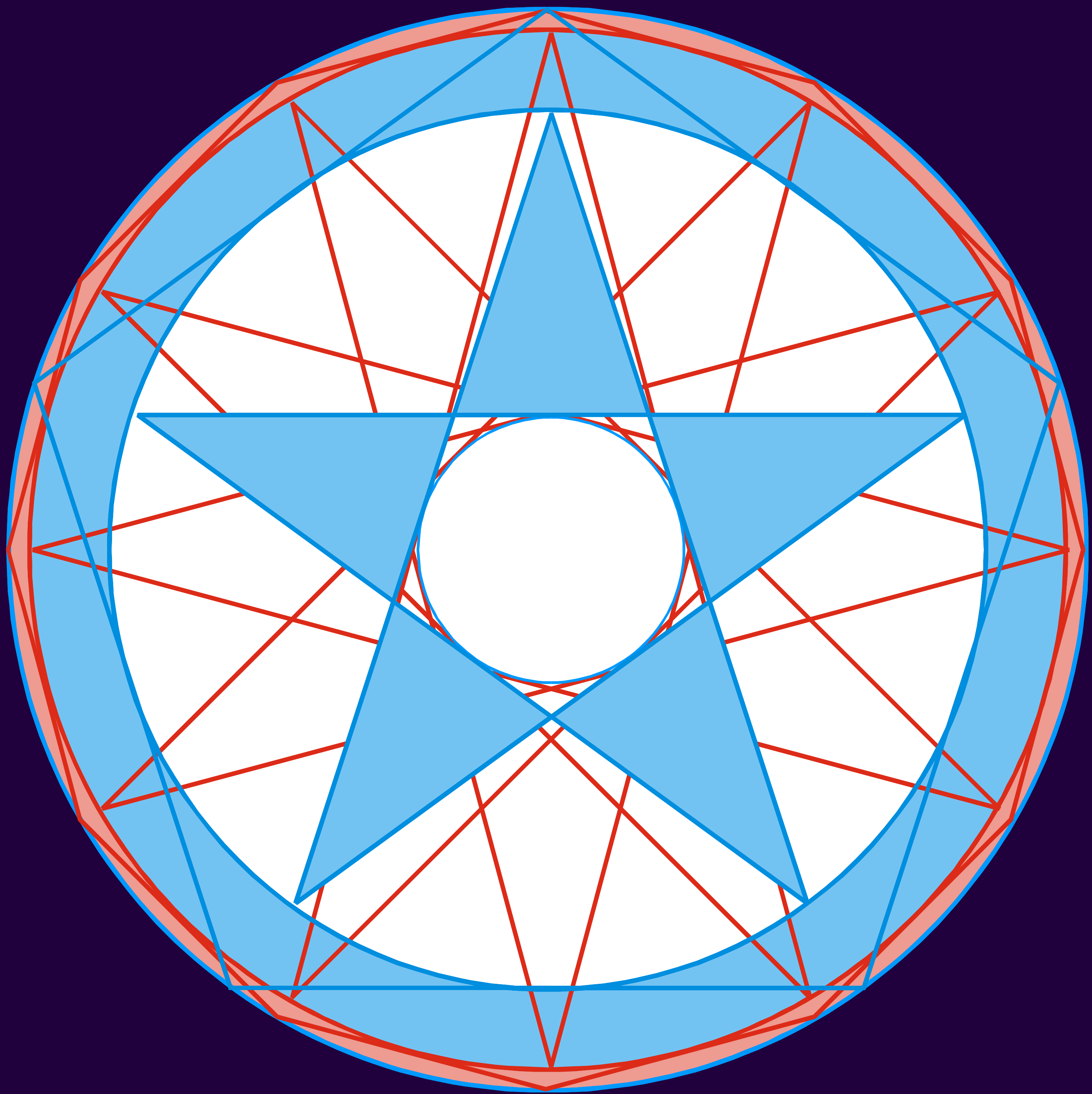


Cathédrale de Chartres

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Geometrisch können wir sie folgendermaßen vereinigen:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



Zwölfsternkreis

$$4*(\sqrt{3}+2)=14{,}928...$$

Zwölfeckkreis

$$4/\left(\sqrt{3}+2\right)=1{,}07179....$$

$$14{,}928..*\ 1{,}07179..=16$$

$$14{,}928..+\ 1{,}07179..=16$$

Fünfsternkreis

$$2*\left(3+\sqrt{5}\right)=10{,}472..$$

Fünfeckkreis

$$2*(3-\sqrt{5})=1{,}52786..$$

$$10{,}472..*\ 1{,}5278..=16$$

$$10{,}472..+1{,}5278..=12$$

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

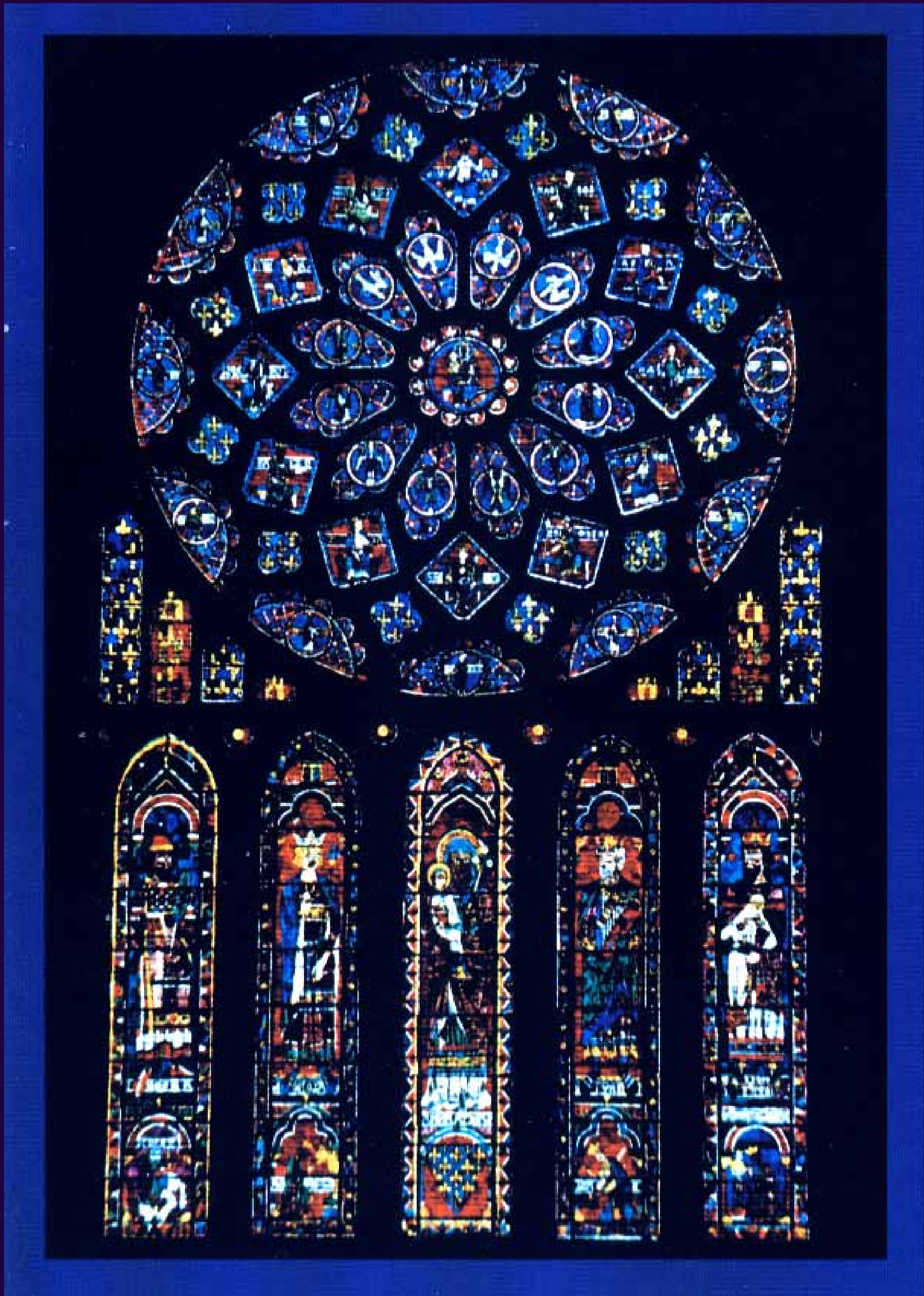
Über Platons Akademie stand geschrieben, keiner, der nicht Freude an der Geometrie hat, trete hier ein.

Rudolf Steiner sagte, an der Geometrie habe er zum ersten Mal das Glück kennengelernt, da in ihr etwas rein Geistiges zum Ausdruck kommt.

Ich würde es so ausdrücken, daß man in dem hier Gezeigten das Weben einer universellen Gesetz-mäßigkeit spürt, die dem entspricht, wonach die Harmoniker aller Zeiten gesucht haben, und deren Gewahrwerden uns die Gewißheit geben kann, daß die Welt im tiefsten Grunde gut ist.

Das Schlußwort aber soll nun Johannes Kepler haben:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de



„Die Geometrie, vor der Entstehung der Dinge von Ewigkeit her zum göttlichen Geist gehörig ..., hat Gott die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert und mit dem Bild Gottes ist sie in den Menschen übergegangen, also nicht erst durch die Augen in das Innere aufgenommen worden.”

Johannes Kepler

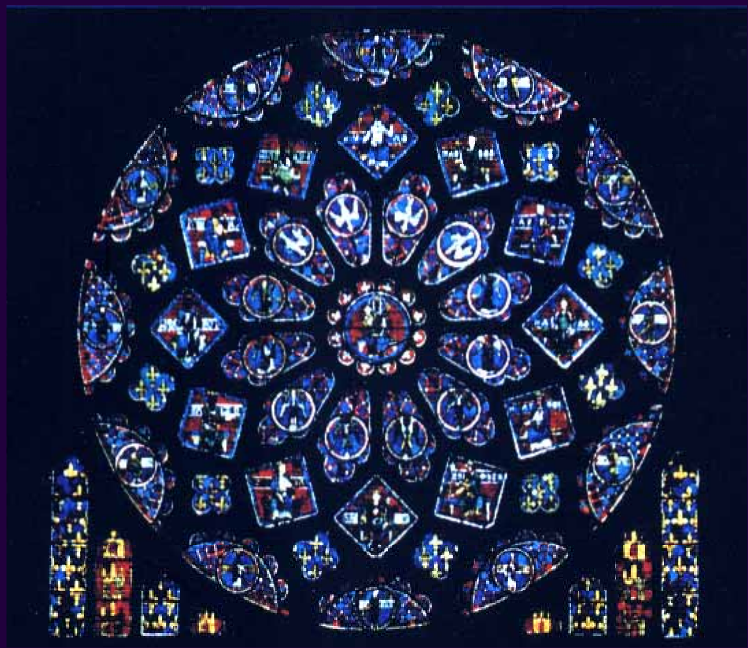
Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Zuletzt ein Hinweis in eigener Sache:

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de

Sphärenmusik und Kosmische Harmonien



Rüttihubelbad/Bern

Seminar, 15. - 17. Mai 2015

www.keplerstern.de

Copyright Hartmut Warm, hw@keplerstern.de, www.keplerstern.de